Integrazione per sostituzione

1. $\displaystyle\int \frac{tg\,\frac{4}{3}x}{cos^2\frac{4}{3}x}\,dx \;=\; \int \frac{\frac{sen\,4x/3}{cos\,4x/3}}{cos^2\,4x/3}\,dx \;=\; \int \frac{sen\,\frac{4}{3}x}{cos^3\frac{4}{3}x}\,dx$

Ponendo $cos\frac{4}{3}x = t$ si ha: $\frac{4}{3}x = arccos\ t$, e cioè $x = \frac{3}{4}arccos\ t$

Da cui $dx = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)\cdot dt$. Mentre $sen\frac{4}{3}x = \sqrt{1-cos^2\frac{4}{3}x} = \sqrt{1-t^2}$ Sostituendo si ha:

$$\int \frac{sen\,\frac{4}{3}x}{cos^3\frac{4}{3}x}\,dx = \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^3}\cdot\left(-\frac{3}{4\cdot\sqrt{1-t^2}}\right)\cdot dt = -\frac{3}{4}\int\frac{1}{t^3}dt = -\frac{3}{4}\int t^{-3}dt = -\frac{3}{4}\cdot\frac{t^{-2}}{-2}+c =$$

$$= \frac{3}{8}\cdot t^{-2}+c = \frac{3}{8t^2}+c = \frac{3}{8\,cos^2\frac{4}{3}x}+c.$$

2. $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$ Ponendo $\sqrt{x}=t$ si ha: $x=t^2$. Da cui $dx = 2t\cdot dt$. Sostituendo si ha:

$\displaystyle\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int\frac{1}{1+t}\,2t\cdot dt = 2\int\frac{t}{1+t}\,dt$ (*). Aggiungendo e sottraendo 1 si ha:

$$= 2\int\frac{1+t-1}{1+t}\,dt = 2\cdot\left[\int\frac{1+t}{1+t}\,dt - \int\frac{1}{1+t}\,dt\right] = 2\cdot\left[\int 1\,dt - \int\frac{1}{1+t}\,dt\right] =$$

$= 2\cdot\left[t - log|1+t|\right]+c$. Risostituendo $\sqrt{x}=t$ si ha: $= 2\sqrt{x} - 2\,log\,\left|1+\sqrt{x}\right| + c$

(*) Allo stesso risultato si perveniva eseguendo la divisione $t : (1+t) = 1 - \frac{1}{1+t}$.

3. $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ Ponendo $x = sen\ t$ con $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$ (con questa restrizione la funzione $x = sen\ t$ risulta invertibile e $\sqrt{cos^2 t} = cos\ t$) si ha $t = arcsen\ x$ e $dx = cos\,t\cdot dt$.

Sostituendo si ottiene: $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int\frac{sen^2 t}{\sqrt{1-sen^2 t}}\cdot cos\,t\cdot dt = \int\frac{sen^2 t}{cos\,t}\cdot cos\,t\cdot dt =$

$$\int sen^2 t\cdot dt = \frac{1}{2}\cdot\left[t-\frac{1}{2}sen\ 2t\right]+c.$$

Ricordando che $sen\ 2t = 2sen\ t\cdot cos\,t$, che $x = sen\ t$ e $cos\,t = \sqrt{1-sen^2 t} = \sqrt{1-x^2}$ si ha:

$sen\ 2t = 2sen\ t\cdot cos\,t = 2x\cdot\sqrt{1-x^2}$.

Sostituendo quest'ultima espressione e la relazione $t = arcsen\ x$

$$\frac{1}{2}\cdot\left[t-\frac{1}{2}sen\ 2t\right]+c = \frac{1}{2}\cdot\left[arcsen\ x - \frac{1}{2}\cdot 2x\sqrt{1-x^2}\right]+c = \frac{1}{2}\cdot\left[arcsen\ x - x\sqrt{1-x^2}\right]+c$$

4. $\int \frac{dx}{e^x+1}$

I° METODO

Ponendo $e^x = t$ si ha: $x = \log_e t$. Da cui: $dx = \frac{1}{t}\cdot dt$. Sostituendo si ha: $\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{1}{t+1}\cdot\frac{1}{t}dt$

$\frac{1}{t+1}\cdot\frac{1}{t} = \frac{A}{t+1}+\frac{B}{t}$; $\frac{1}{(t+1)\cdot t} = \frac{A\cdot t + B\cdot(t+1)}{(t+1)\cdot t}$;

Eliminando i denominatori si ha: $1 = A\cdot t + B\cdot(t+1)$;

$1 = A\cdot t + B\cdot t + B$; $1 = (A+B)\cdot t + B$. Dovendo questa uguaglianza sussistere per ogni valore della variabile t, i coefficienti dei termini di uguale grado dei due membri devono essere uguali.

Deve risultare pertanto: $\begin{cases} A+B=0 \\ B=1 \end{cases}$ da cui sostituendo si ha: $\begin{cases} A+1=0 \\ --- \end{cases}$ $\begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$

In definitiva $\int \frac{1}{t+1}\cdot\frac{1}{t}dt = \int \left[\frac{-1}{t+1}+\frac{1}{t}\right]dt = -\int\frac{1}{t+1}dt + \int\frac{1}{t}dt = -\log|t+1| + \log|t| + c$

Risostituendo $e^x = t$ si ha: $-\log(e^x+1) + \log e^x + c$ che si può scrivere anche come:

$= -\left(\log(e^x+1) - \log e^x\right) + c = -\log\frac{e^x+1}{e^x} + c = -\log\left(1+\frac{1}{e^x}\right) + c$

II° METODO

Aggiungendo e sottraendo e^x si ha: $\int \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}\,dx = \int 1\,dx - \int\frac{e^x}{e^x+1}\,dx =$

$x - \log(e^x+1) + c = x\cdot\log_e e - \log(e^x+1) + c = \log e^x - \log(e^x+1) + c =$

$-\left(\log(e^x+1) - \log e^x\right) + c = -\log\frac{e^x+1}{e^x} + c = -\log\left(1+\frac{1}{e^x}\right) + c$

III° METODO

Moltiplicando e dividendo per $t+1$ si ha: $\int \frac{1}{t+1}\cdot\frac{1}{t}dt = \int \frac{1}{(t+1)^2}\cdot\frac{t+1}{t}dt = \int \frac{\frac{1}{(t+1)^2}}{\frac{t}{t+1}}dt =$

Essendo la funzione del Numeratore la derivata della funzione del denominatore, si può applicare la regola $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + c$. Pertanto si ha: $\log\left|\frac{t}{t+1}\right| + c = \log|t| - \log|t+1| + c$

Risostituendo $e^x = t$ si ha: $-\log(e^x+1) + \log e^x + c$ che si può scrivere anche come:

$= -\left(\log(e^x+1) - \log e^x\right) + c = -\log\frac{e^x+1}{e^x} + c = -\log\left(1+\frac{1}{e^x}\right) + c$.

5. $\int \frac{1}{x\cdot\sqrt{1-\log^2 x}}\,dx$ Ponendo $\log x = t$ si ha: $x = e^t$. Da cui: $dx = e^t\cdot dt$. Sostituendo:

$= \int \frac{1}{e^t\cdot\sqrt{1-t^2}}\cdot e^t dt = \int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \text{arcsen}\ t + c = \text{arcsen}\ (\log x) + c$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x\cdot(1+\log x)}\,dx$ Ponendo $\log x = t$ si ha: $x = e^t$. Da cui: $dx = e^t \cdot dt$.

Sostituendo si ha: $\displaystyle\int \frac{1}{t\cdot e^t\cdot(1+t)}\cdot e^t\,dt = \int \frac{1}{t\cdot(1+t)}\,dt = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1+t}\,dt$.

Trasformando il prodotto in una somma di due funzioni, si ha:

$\displaystyle\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1+t} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t}$; $\displaystyle\frac{1}{(1+t)\cdot t} = \frac{A\cdot t + B\cdot(1+t)}{(1+t)\cdot t}$;

Eliminando i denominatori si ha: $1 = A\cdot t + B\cdot(1+t)$;

$1 = A\cdot t + B\cdot t + B$; $1 = (A+B)\cdot t + B$. Dovendo questa uguaglianza sussistere per ogni valore della variabile t, i coefficienti dei termini di uguale grado dei due membri devono essere uguali.

Deve risultare pertanto: $\begin{cases} A+B=0 \\ B=1 \end{cases}$ da cui sostituendo si ha: $\begin{cases} A+1=0 \\ --- \end{cases}$ $\begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$

In definitiva $\displaystyle\int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int\left[\frac{-1}{1+t}+\frac{1}{t}\right]dt = -\int\frac{1}{1+t}\,dt + \int\frac{1}{t}\,dt = -\log|1+t| + \log|t| + c =$

$\displaystyle= \log\left|\frac{t}{1+t}\right| + c =$ Risostituendo $\log x = t$ si ha: $\displaystyle\log\left|\frac{\log x}{1+\log x}\right| + c$.

7. $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ (con $a>0$). Ponendo $x = a\cdot sen\ t$ con $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$ (con questa restrizione la funzione $x = sen\ t$ risulta invertibile e $\sqrt{cos^2 t} = cos\ t$) si ha $sen\ t = \frac{x}{a}$; $t = arcsen\ \frac{x}{a}$ e

$dx = a\cdot cos\,t\cdot dt$. Sostituendo si ottiene:

$\displaystyle= \int\sqrt{a^2-a^2 sen^2 t}\cdot a\cdot cos\,t\cdot dt = \int a\sqrt{1-sen^2 t}\cdot a\cdot cos\,t\cdot dt = \int a^2\sqrt{1-sen^2 t}\cdot cos\,t\cdot dt =$

$\displaystyle= a^2\cdot\int cos^2 t\cdot dt = \frac{1}{2}a^2\cdot\left(t + sen\ t\cdot cos\,t\right) + c$.

Risostituendo $sen\ t = \frac{x}{a}$ e $cos\ t = \sqrt{1-sen^2 t} = \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ si ottiene:

$$= \frac{1}{2}a^2\cdot\left(arcsen\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right) + c = \frac{1}{2}a^2\cdot\left(arcsen\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\cdot\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}\right) + c =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\cdot\left(arcsen\frac{x}{a} + \frac{x}{a^2}\cdot\sqrt{a^2-x^2}\right) + c = \frac{1}{2}\cdot\left(a^2\cdot arcsen\frac{x}{a} + x\cdot\sqrt{a^2-x^2}\right) + c\ .$$