Integrazione per parti

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue e dotate di derivata continua.

Dalla formula della derivata del prodotto delle due funzioni:

$D\left[f(x)\cdot g(x)\right] = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$ si ottiene:

$f'(x)\cdot g(x) = D\left[f(x)\cdot g(x)\right] - f(x)\cdot g'(x)$

integrando ambo i membri si ottiene la regola di integrazione per parti:

$$\boxed{\int f'(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx}$$

Il fattore $f'(x)$ si dice fattore differenziale, mentre $g(x)$ si dice fattore finito.

1. $\int arcsenx\ dx = \int 1\cdot arcsenx\ dx =$

Considerando $\begin{cases} f'(x)=1 & \textit{fattore differenziale} \\ g(x)=arcsen\ x & \textit{fattore finito} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)=x \\ g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$

Pertanto $\int 1\cdot arcsenx\ dx = x\cdot arcsen\ x - \int x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\cdot arcsen\ x - \int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$

$$= x\cdot arcsen\ x - \frac{1}{2}\cdot\int 2x\cdot\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx = x\cdot arcsen\ x + \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + k =$$

$$= x\cdot arcsen\ x + \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + k = x\cdot arcsen\ x + \sqrt{1-x^2} + k$$

2. $\int arctgx\ dx = \int 1\cdot arctgx\ dx =$

Considerando $\begin{cases} f'(x)=1 & \textit{fattore differenziale} \\ g(x)=arctg\ x & \textit{fattore finito} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)=x \\ g'(x)=\dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$

Pertanto $\int 1\cdot arctgx\ dx = x\cdot arctg\ x - \int x\cdot\dfrac{1}{1+x^2}\,dx = x\cdot arctg\ x - \int\dfrac{x}{1+x^2}\,dx =$

$$= x\cdot arctg\ x - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx = x\cdot arctg\ x - \frac{1}{2}\cdot\log\left(1+x^2\right) + k\ .$$

3. $\int log\ dx \quad = \quad \int 1 \cdot log\, x\ dx \quad =$

Considerando $\begin{cases} f'(x) = 1 & \textit{fattore differenziale} \\ g\ (x) = log\ \ x & \textit{fattore finito} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

Pertanto $\int log\ dx \quad = \quad x \cdot log\ \ x - \int x \cdot \dfrac{1}{x}\ dx \quad = \quad x \cdot log\ \ x - \int 1\ dx \quad = \quad x \cdot log\ \ x \ - \ x \ + \ k\,.$

4. $\int x \cdot sen\ x\ dx \quad =$

Considerando $\begin{cases} f'(x) = sen\ x & \textit{fattore differenziale} \\ g\ (x) = x & \textit{fattore finito} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) = -\cos x \\ g'(x) = 1 \end{cases}$

Pertanto $\int x \cdot sen\ x\ dx \quad = \quad -x \cdot \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x)\ dx \quad = \quad -x \cdot \cos x + senx \ + \ k\ .$

5. $\int x \cdot sen\ 5x\ dx \quad =$

Considerando $\begin{cases} f'(x) = sen\ 5x & \textit{fattore differenziale} \\ g\ (x) = x & \textit{fattore finito} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) = -\dfrac{1}{5}\cos 5x \\ g'(x) = 1 \end{cases}$

Pertanto $\int x \cdot sen\ 5x\ dx \quad = \quad -\dfrac{1}{5} x \cdot \cos 5x - \int 1 \cdot \left(-\dfrac{1}{5}\cos 5x \right) dx \quad =$

$= \quad -\dfrac{1}{5} x \cdot \cos 5x + \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{5} \cdot \int 5 \cdot \cos 5x\ dx \quad = \quad -\dfrac{1}{5} x \cdot \cos 5x + \dfrac{1}{25} \cdot sen\ 5x \ + \ k\ .$

6. $\int x \cdot log\, x\ dx \quad =$

Considerando $\begin{cases} f'(x) = x & \textit{fattore differenziale} \\ g\ (x) = log\ \ x & \textit{fattore finito} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{2} \\ g'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

Pertanto $\int x \cdot log\, x\ dx \quad = \quad \dfrac{x^2}{2} \cdot log\ \ x - \int \dfrac{x^2}{2} \cdot \dfrac{1}{x}\ dx \quad = \quad \dfrac{x^2}{2} \cdot log\ \ x - \dfrac{1}{2} \int x\ dx \quad =$

$= \quad \dfrac{x^2}{2} \cdot log\ \ x - \dfrac{1}{2}\dfrac{x^2}{2} \ + \ k \quad = \quad \dfrac{x^2}{2} \cdot log\ \ x - \dfrac{x^2}{4} \ + \ k\,.$

7. $\int x^2 \cdot \log x \; dx \quad =$

Considerando $\begin{cases} f^I(x) = x^2 & \textit{fattore differenziale} \\ g\;(x) = \log \; x & \textit{fattore finito} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3}{3} \\ g^I(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

Pertanto $\int x^2 \cdot \log x \; dx \; = \; \dfrac{x^3}{3} \cdot \log \; x - \int \dfrac{x^3}{3} \cdot \dfrac{1}{x} \; dx \; = \; \dfrac{x^3}{3} \cdot \log \; x - \dfrac{1}{3} \int x^2 \; dx \; =$

$= \; \dfrac{x^3}{3} \cdot \log \; x - \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{x^3}{3} \; + \; k \; = \; \dfrac{x^3}{3} \cdot \log \; x - \dfrac{x^3}{9} \; + \; k$

8. $\int \sqrt{x} \cdot \log x \; dx \quad =$

Considerando $\begin{cases} f^I(x) = \sqrt{x} & \textit{fattore differenziale} \\ g\;(x) = \log \; x & \textit{fattore finito} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \dfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \\ g^I(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

Pertanto $\int \sqrt{x} \cdot \log x \; dx \; = \; \dfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \log \; x - \dfrac{2}{3} \int x^{\frac{3}{2}} \cdot \dfrac{1}{x} \; dx \; = \; \dfrac{2}{3} \sqrt{x^3} \cdot \log \; x - \dfrac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}} \; dx \; =$

$= \; \dfrac{2}{3} x\sqrt{x} \cdot \log \; x - \dfrac{2}{3} \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \; + \; k \; = \; \dfrac{2}{3} x\sqrt{x} \cdot \log \; x - \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \; + \; k \; =$

$= \; \dfrac{2}{3} x\sqrt{x} \cdot \log \; x - \dfrac{4}{9} x\sqrt{x} \; + \; k \; = \; \dfrac{2}{9} x\sqrt{x} \cdot \left(3 \log \; x - 2 \right) \; + \; k$

9. $\int x \cdot \log\left(x+2\right) dx \quad =$

Considerando $\begin{cases} f^I(x) = x & \textit{fattore differenziale} \\ g\;(x) = \log \; \left(x+2\right) & \textit{fattore finito} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{2} \\ g^I(x) = \dfrac{1}{x+2} \end{cases}$

Pertanto $\int x \cdot \log\left(x+2\right) dx \; = \; \dfrac{x^2}{2} \cdot \log \; \left|x+2\right| - \int \dfrac{x^2}{2} \cdot \dfrac{1}{x+2} \; dx \; = \; \dfrac{x^2}{2} \cdot \log \; \left|x+2\right| - \dfrac{1}{2} \int \dfrac{x^2}{x+2} \; dx \; =$

Calcoliamo pertanto l'integrale: $\int \dfrac{x^2}{x+2} \; dx$ eseguendo la divisione:

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\int \left(x-2\right) dx + \int \frac{4}{x+2} \; dx \right]$$

$$\begin{array}{ccc|c} x^2 & & & x+2 \\ \hline -x^2 & -2x & & x-2 \\ \hline = & -2x & & \\ = & +2x & +4 & \\ \hline & = & +4 & \end{array}$$

$= \; \dfrac{x^2}{2} \cdot \log\left|x+2\right| - \dfrac{1}{2} \cdot \left[\int \left(x-2\right) dx + \int \dfrac{4}{x+2} \; dx \right] = \; \dfrac{x^2}{2} \cdot \log\left|x+2\right| - \dfrac{x^2}{4} + x - 2 \cdot \log \; \left|x+2\right| \; + \; k \; .$