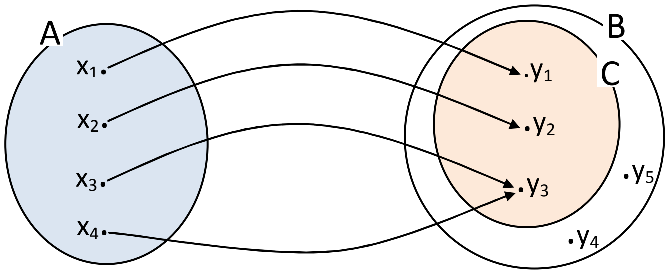
FUNZIONI

Funzioni

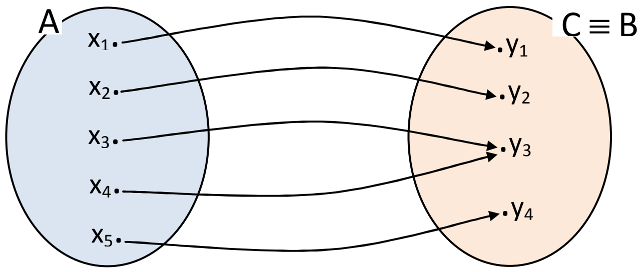
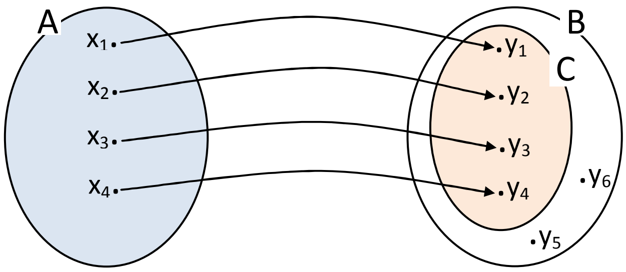
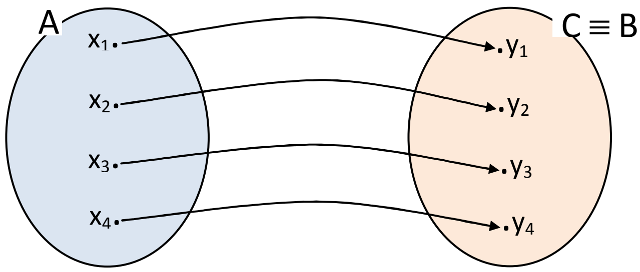
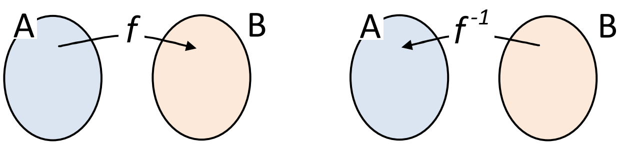
Una **funzione** è una relazione fra due insiemi non vuoti A e B, che associa ad ogni elemento $x \in A$ uno e un solo elemento $y \in B$. In simboli si scrive: $y = f(x)$ oppure $f : A \longrightarrow B$.



L'elemento y è detto **immagine** di x . L'elemento x è detto **controimmagine** di y.

Il **dominio** o insieme di definizione di una funzione f, è l'insieme di partenza A formato da tutti gli elementi $x \in A$ che hanno un'immagine $y \in B$. In simboli $D = \{x \in A \ / \ y = f(x) \ \wedge \ y \in B\}$.

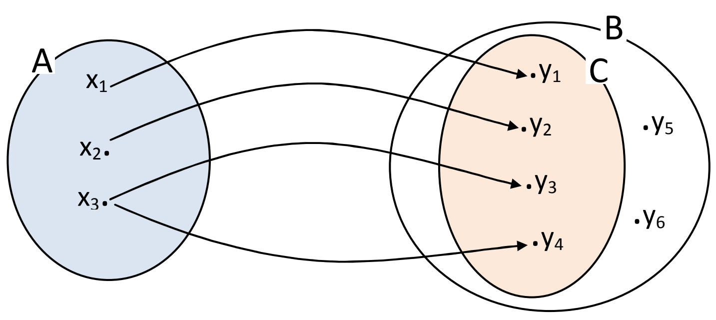
Il **codominio** o insieme immagine di una funzione f, è il sottoinsieme C dell'insieme di arrivo B costituito da tutti gli elementi y $\in$ B che sono immagini di almeno un elemento $x \in A$. In simboli $C = \{y \in B \ / \ y = f(x) \ \wedge \ x \in A\}$.

Funzione suriettiva Una funzione da A a B è suriettiva quando ogni elemento dell'insieme di arrivo B è immagine di almeno un elemento del dominio A.	 Su ogni elemento di B arriva almeno una freccia
Funzione iniettiva Una funzione da A a B è iniettiva quando ogni elemento dell'insieme di arrivo B è immagine al più di un elemento del dominio A.	 Su ogni elemento di B arriva al più una freccia
Funzione biunivoca (o biettiva) Una funzione da A a B è biunivoca quando è sia iniettiva sia suriettiva.	 Su ogni elemento di B arriva una e una sola freccia
Funzione inversa Se $f : A \longrightarrow B$ è una funzione biunivoca, allora esiste la funzione inversa $f^{-1} : B \longrightarrow A$ che ad ogni $y \in B$ associa uno e un solo $x \in A$ tale che $y = f(x)$.	

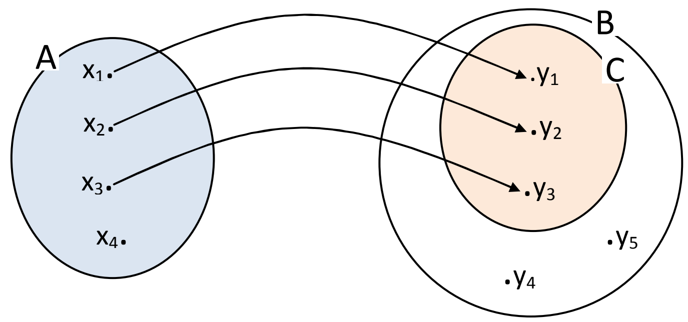
Esempio 1

Siano $A = \{x \, / \, x \text{ è } uno\ studente\ della\ classe\ 1\,C\}$ *e* $B = \{y \, / \, y \text{ è } una\ \ città\ italiana\}$
La relazione R:"x è nato nella città y" è una funzione da A in B.

Esempi di relazioni che non sono funzioni



Non è una funzione
perché all'elemento $x_3 \in A$ corrispondono i due elementi $y_3, y_4 \in B$



Non è una funzione
perché all'elemento $x_4 \in A$ non corrisponde alcun elemento $y \in B$

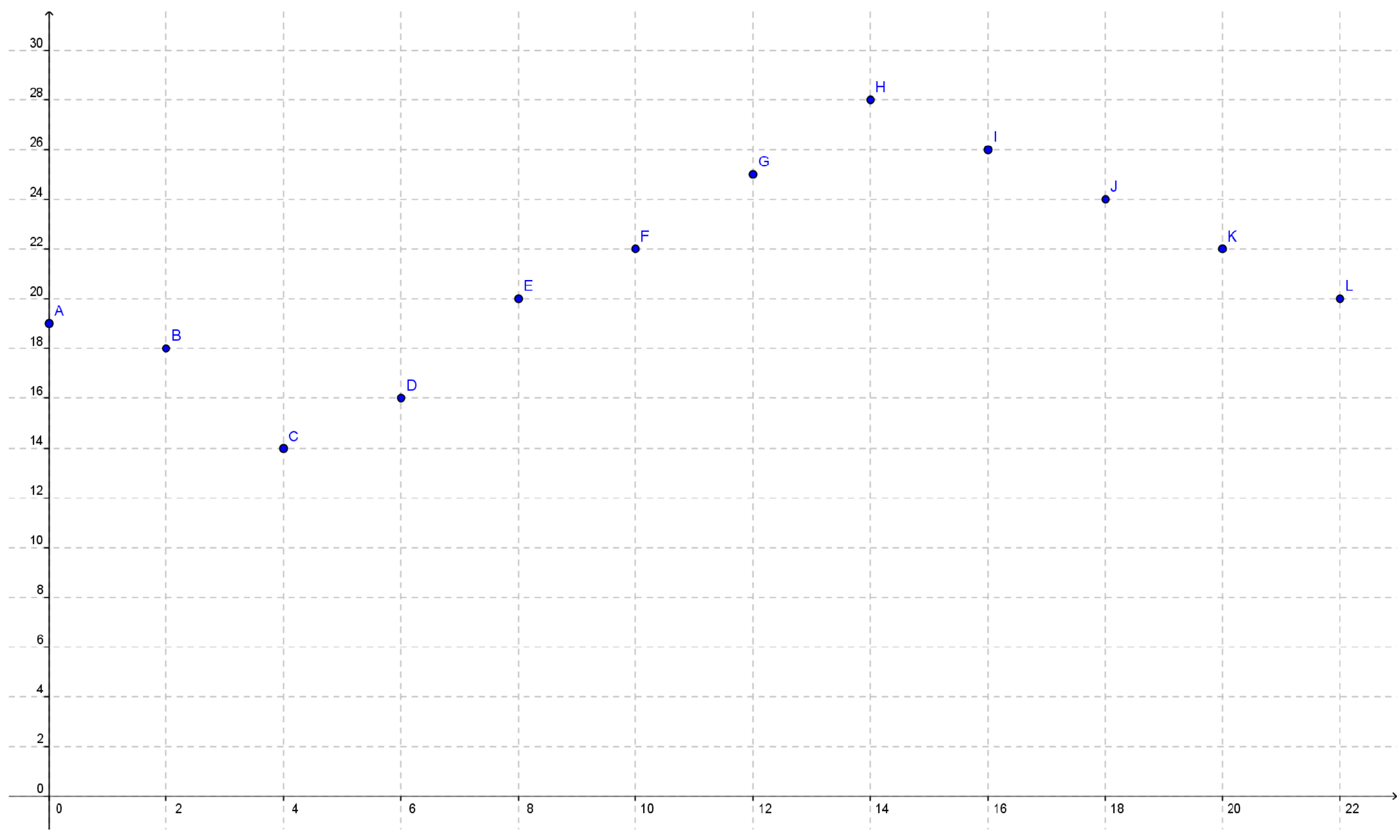
Funzioni empiriche

Una **funzione empirica** è una funzione in cui l'immagine $y \in B$ di un elemento $x \in A$ è ottenibile per mezzo di misurazioni sperimentali (in fisica, in chimica, …) o di rilevazioni (in economia, statistica).

Esempio

Nella stazione meteorologica di Trebisacce, il giorno 18 maggio 2012, sono state rilevate le seguenti temperature:

Ora del giorno (h)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Temperatura (°C)	19	18	14	16	20	22	25	28	26	24	22	20



Funzioni numeriche

Una **funzione numerica** è una funzione definita fra due insiemi numerici.

Le funzioni numeriche più importanti sono le funzioni reali di variabile reale.

Una **funzione reale di variabile reale** è una funzione che ha per dominio e codominio sottoinsiemi dei numeri reali.

Una funzione reale di variabile reale è definita solitamente tramite la sua espressione analitica $\boldsymbol{f(x)} =$ ...

La variabile x è detta **variabile indipendente**. La variabile $\boldsymbol{y}$ è detta **variabile dipendente**.

Quando viene assegnata l'espressione analitica di una funzione senza specificare il dominio e il codominio, si assume, per convenzione:

- come **Dominio**, l'insieme costituito da tutti i numeri reali per cui le operazioni che compaiono nella sua espressione analitica si possono eseguire;
- come **Codominio**, l'insieme R.

Esempi

La funzione $f(x) = 2x + 1$ *ha per dominio l'insieme* R .

La funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ *ha per dominio l'insieme* $R - \{3\}$.

La funzione $f(x) = \sqrt[2]{x} + 3x$ *ha per dominio l'insieme* $D = \{x \in R \ / \ x \geq 0\}$.

Funzioni particolari

Una funzione $f : A \longrightarrow B$ si dice **costante**, se $f(A)$ contiene un solo elemento.

Una funzione $f : A \longrightarrow A$ è una **identità**, e si indica I_A se ad ogni elemento $x \in A$ associa l'elemento stesso $x \in A$.

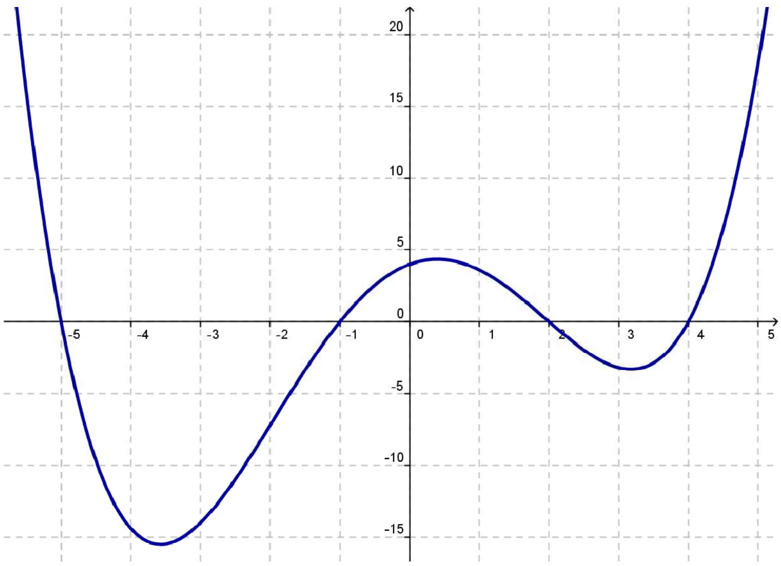
Esempi

La funzione $f(x) = 5$ *è costante, perché, per ogni valore di* x, *risulta* $f(x) = 5$.
La funzione $f(x) = x$ *è un'identità, perché, per ogni valore di* x, *risulta* $f(x) = x$.

Grafico di una funzione reale di variabile reale

Il tipo di rappresentazione più idoneo per rappresentare una funzione reale di variabile reale è il grafico cartesiano.

Il **grafico cartesiano** di una funzione $f(x)$ è l'insieme di tutti i punti del piano cartesiano le cui coordinate $(x; y)$ verificano l'equazione della funzione $y = f(x)$.



Funzioni notevoli

Funzione della proporzionalità diretta

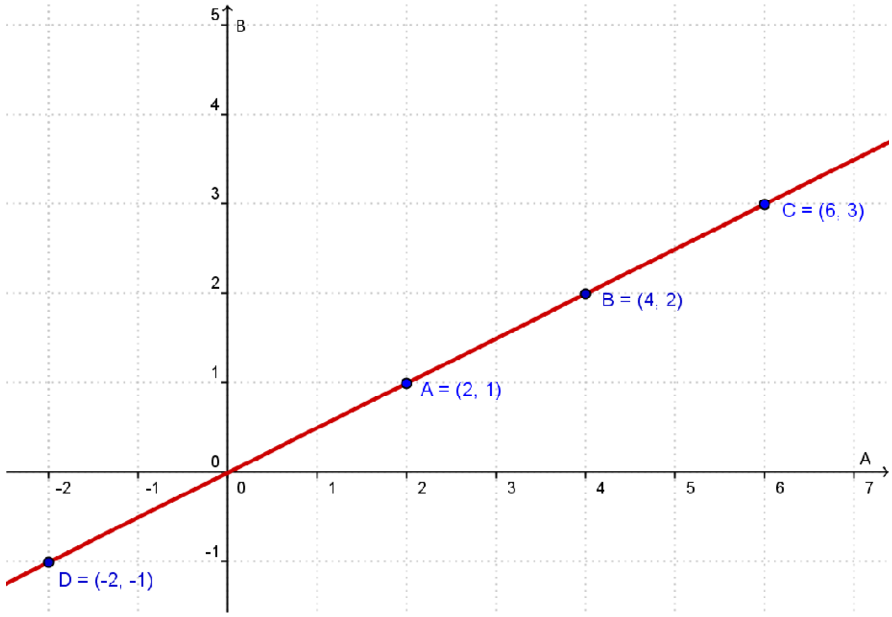
Una funzione di proporzionalità diretta è una funzione del tipo $\boldsymbol{y = kx}$ $\quad (k \neq 0)$ oppure $\frac{y}{x} = k$

*Le variabili x e y legate da una funzione di proporzionalità diretta si dicono **direttamente proporzionali**.*

Due variabili inversamente proporzionali hanno rapporto costante.

$$y = \frac{1}{2}x$$

x	y
-2	-1
0	0
2	1
4	2
6	3



Funzione della proporzionalità inversa

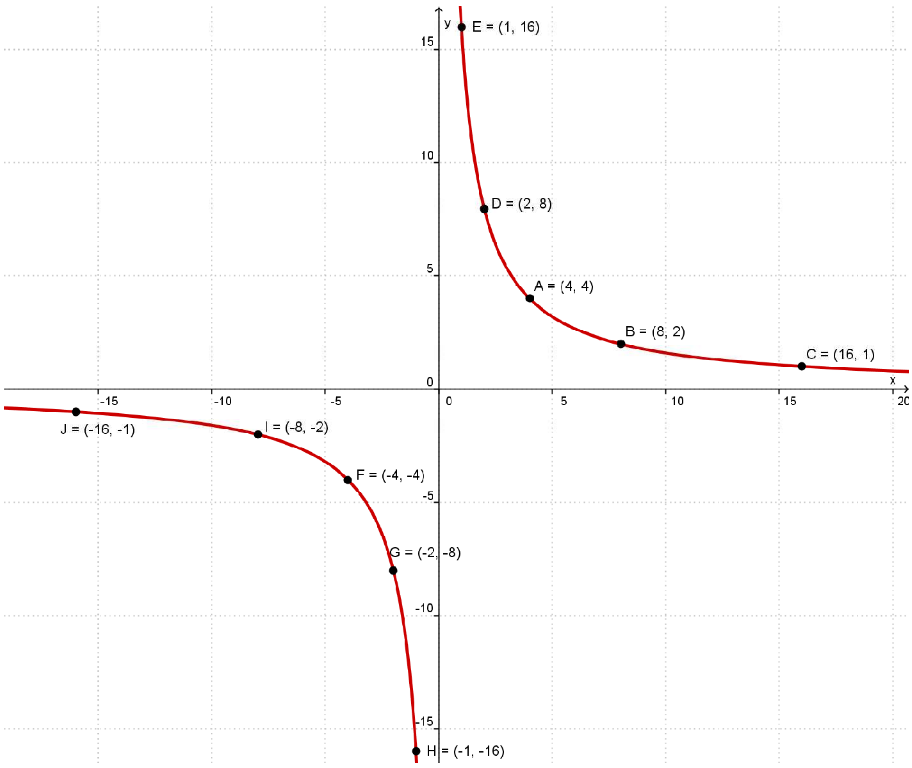
Una funzione di proporzionalità inversa è una funzione del tipo $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$ $\quad (k \neq 0)$ oppure $x \cdot y = k$

*Le variabili x e y legate da una funzione di proporzionalità diretta si dicono **inversamente proporzionali**.*

Due variabili inversamente proporzionali hanno prodotto costante. *Se $k < 0$ il grafico si trova nel II e IV quadrante.*

$$y = \frac{16}{x}$$

x	y
-16	-1
-8	-2
-4	-4
-2	-8
-1	-16
1	16
2	8
4	4
8	2
16	1



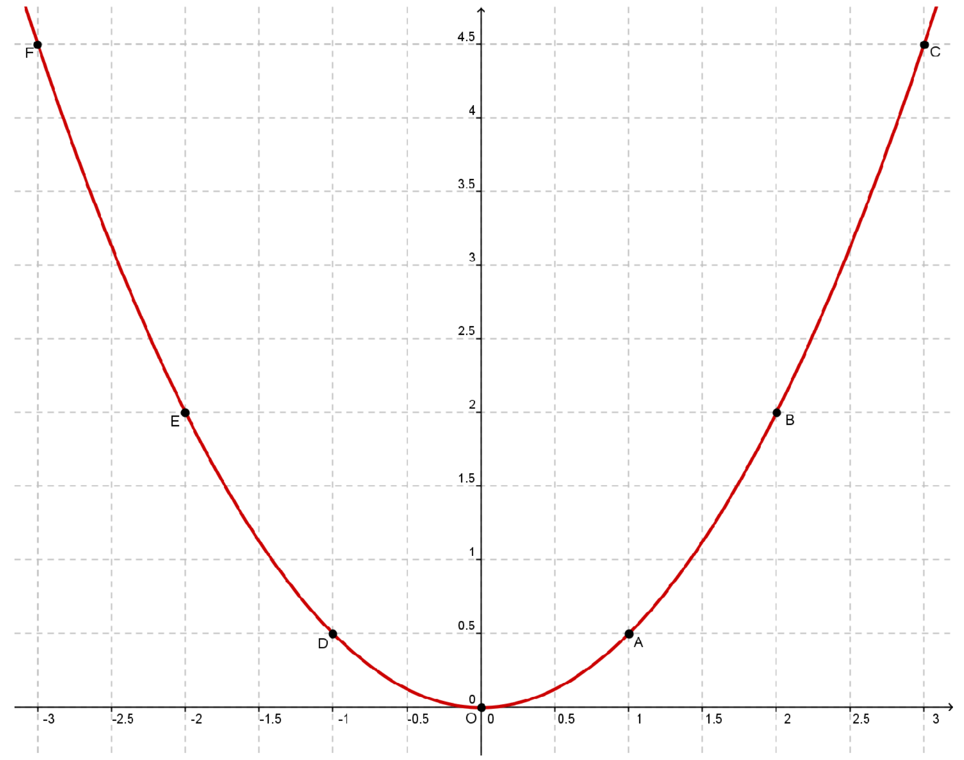
Funzione della proporzionalità quadratica

Una funzione di proporzionalità quadratica è una funzione del tipo $\boldsymbol{y = ax^2}$ $\quad (a \in R)$

Il grafico di $y = ax^2$ *è una parabola con il vertice nell'origine degli assi. Se* $a < 0$ *il grafico ha la concavità rivolta verso il basso.*

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

x	y
0	0
1	$1/2$
2	2
3	$9/2$
-1	$1/2$
-2	2
-3	$9/2$

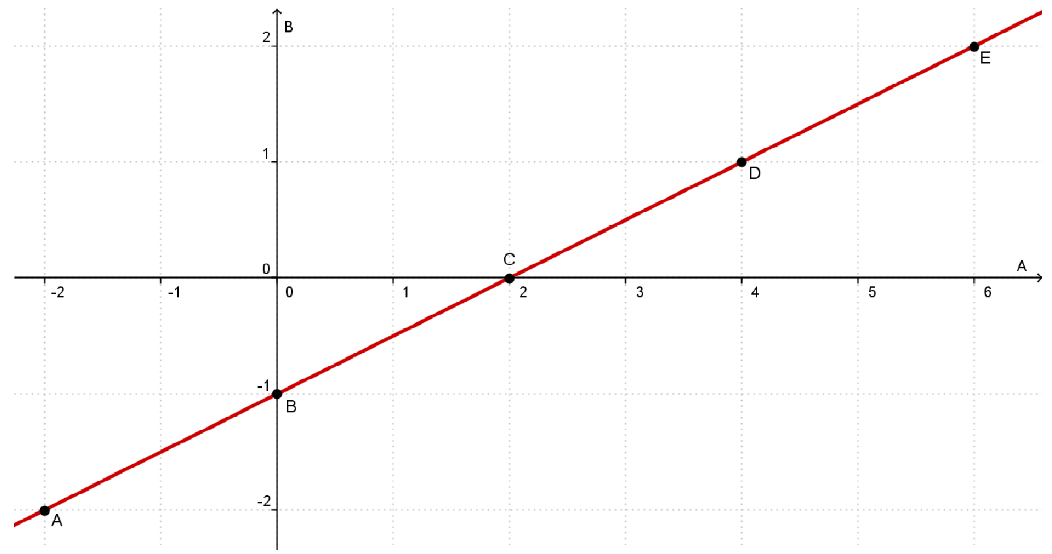


Funzione lineare

Una funzione lineare è una funzione del tipo $\boldsymbol{y = ax + b}$ $\quad (a, b \in R)$

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

x	y
-2	-2
0	-1
2	0
4	1
6	2



Funzione quadratica

Una funzione quadratica è una funzione del tipo $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ $\quad (a, b, c \in R)$

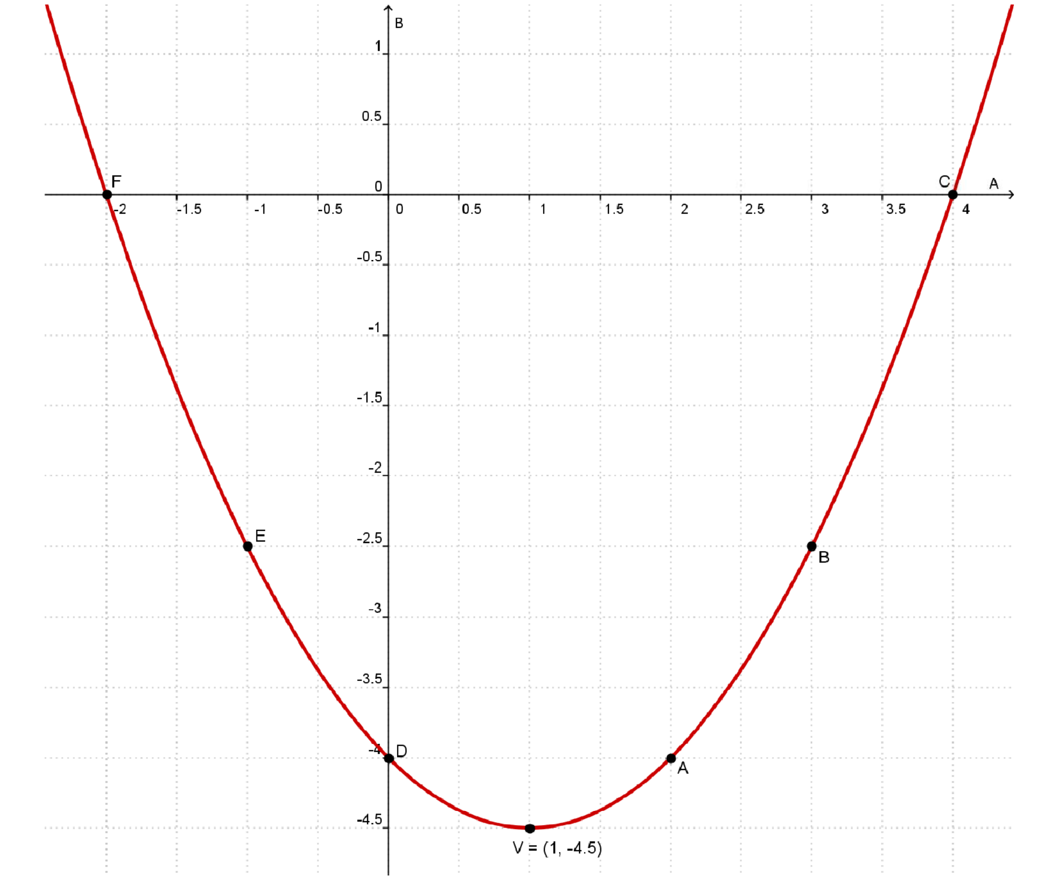
Per disegnarla conviene determinare l'ascissa del vertice $x_V = -\dfrac{b}{2a}$ *e le coordinate di un paio di punti a sx e a dx del vertice.*

Se $a < 0$ *il grafico ha la concavità rivolta verso il basso.*

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$$

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1$$

x	y
1	$-9/2$
2	-2
3	$-5/2$
4	0
0	-4
-1	$-5/2$
-2	0



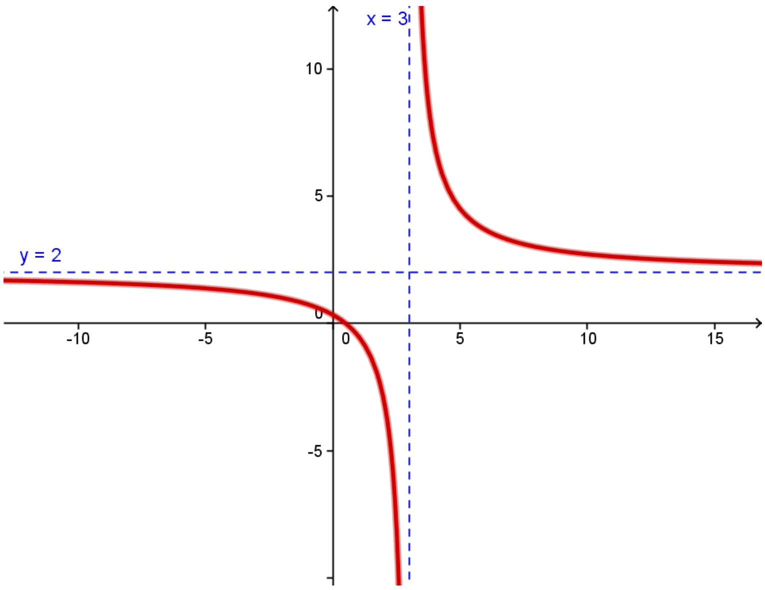
Funzione omografica

La funzione omografica è una funzione del tipo $\boldsymbol{y = \dfrac{ax+b}{cx+d}}$ $\quad$ *con* $c \neq 0 \quad \wedge ad \neq bc$

Le rette $cx + d = 0$ *e* $y = \dfrac{a}{c}$ *sono gli asintoti della curva.*

$$y = \frac{2x - 1}{x - 3}$$

x	y
5	$9/2$
10	$19/7$
15	$29/12$
2	-3
0	$1/3$
-5	$11/8$
-10	$21/13$



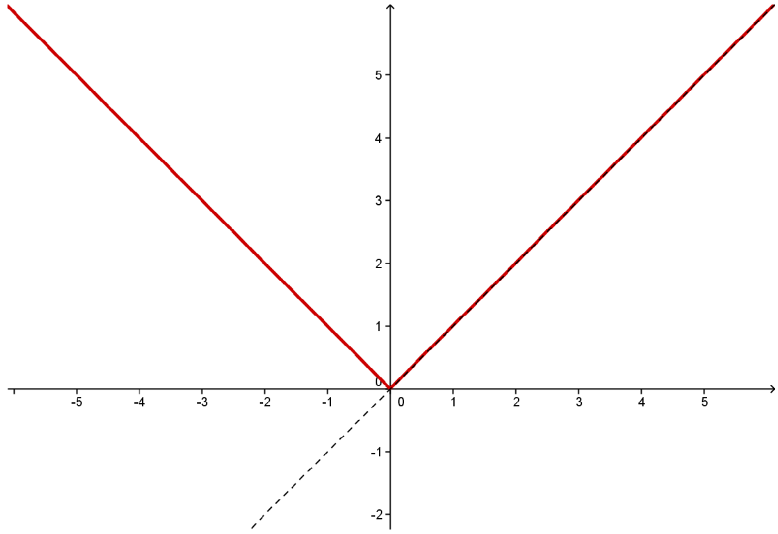
Funzione valore assoluto

La funzione valore assoluto è una funzione del tipo $\boldsymbol{y = |f(x)|}$

Il grafico di $y = |f(x)|$ *si ottiene simmetrizzando, rispetto all'asse x, la parte del grafico di* $f(x)$ *che si trova sotto l'asse x.*

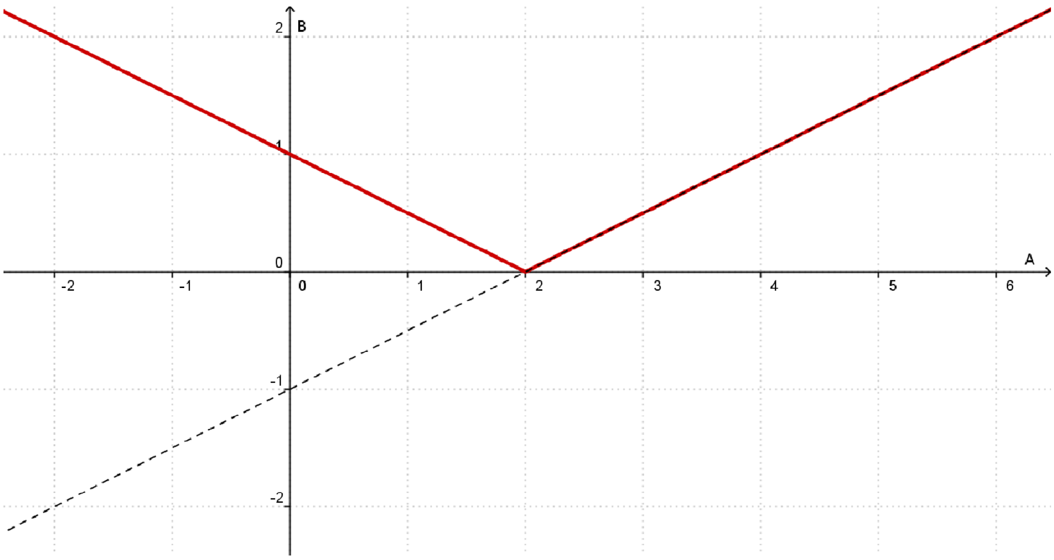
$y = |x|$

x	y
0	0
3	3
-3	-3



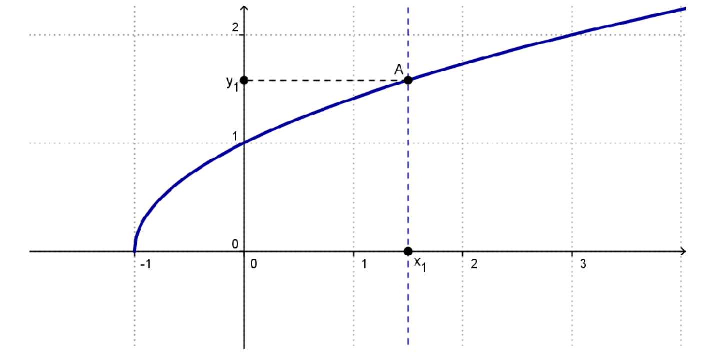
$y = \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$

x	y
2	0
6	2

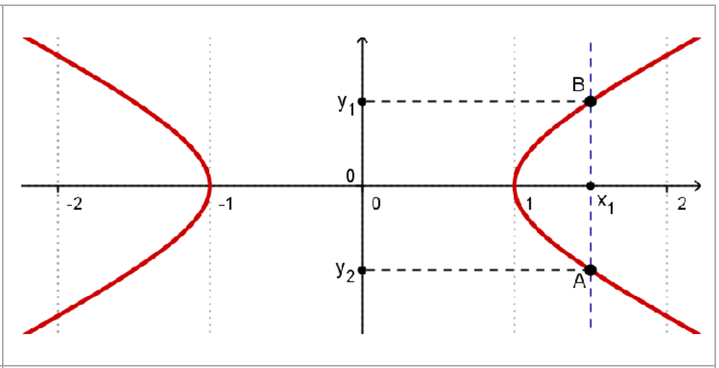


Riconoscimento di una funzione

Il grafico di una **funzione**, è intersecato da una qualsiasi retta verticale al massimo in un punto.



$f:[-1,+\infty[\ \longrightarrow R$ è una funzione



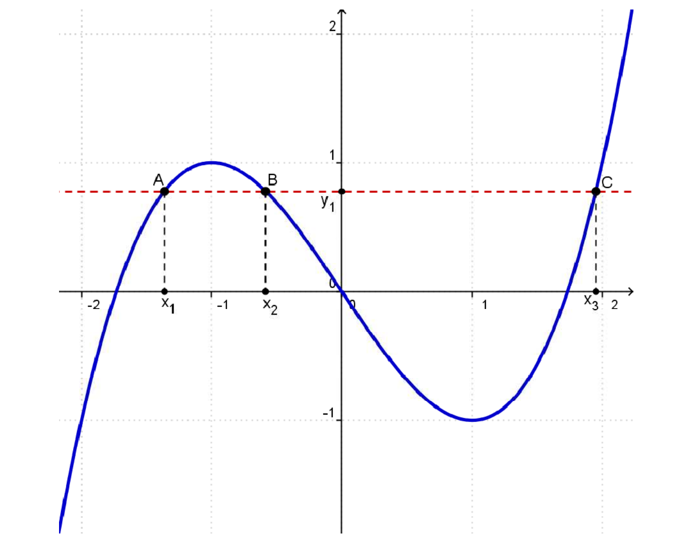
Non è una funzione

Riconoscimento del tipo di funzione

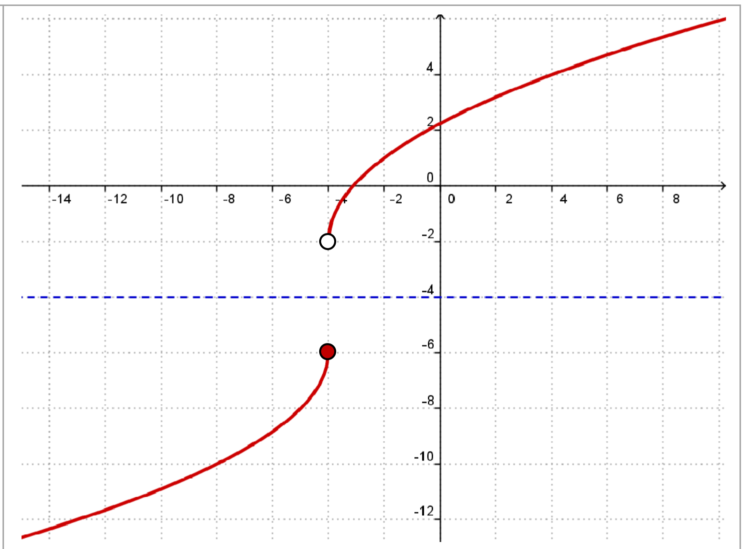
Il grafico di una **funzione suriettiva** $f: R \longrightarrow R$ è intersecato da una qualsiasi retta orizzontale almeno in un punto.

Il grafico di una **funzione iniettiva** $f: R \longrightarrow R$ è intersecato da una qualsiasi retta orizzontale al massimo in un punto

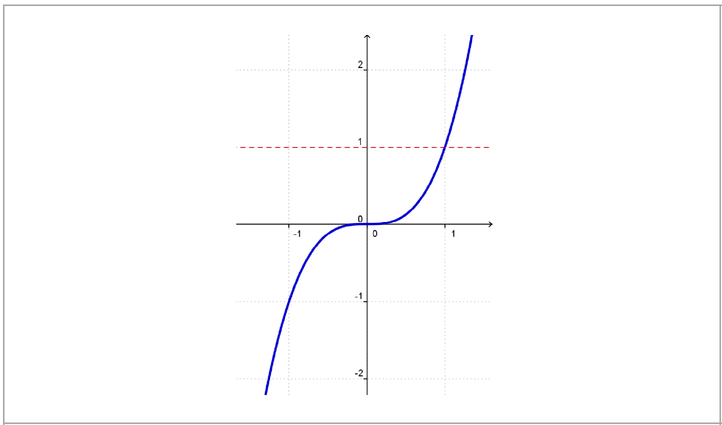
Il grafico di una **funzione biunivoca** $f: R \longrightarrow R$ è intersecato da una qualsiasi retta orizzontale in un solo punto.



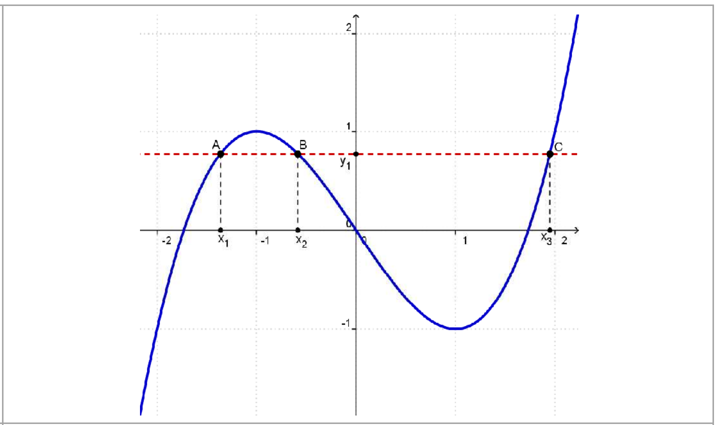
$f: R \longrightarrow R$ è una funzione suriettiva, ma non iniettiva



$f: R \longrightarrow R$ è una funzione iniettiva, ma non suriettiva

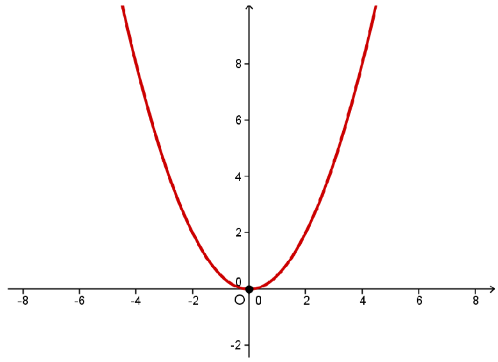
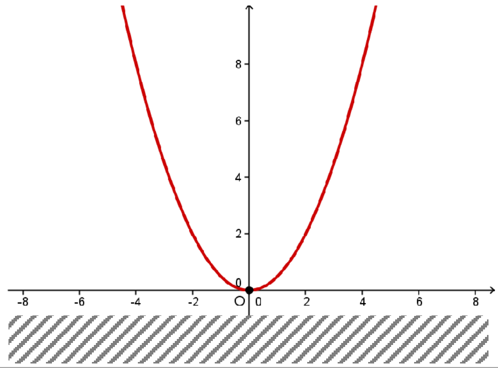
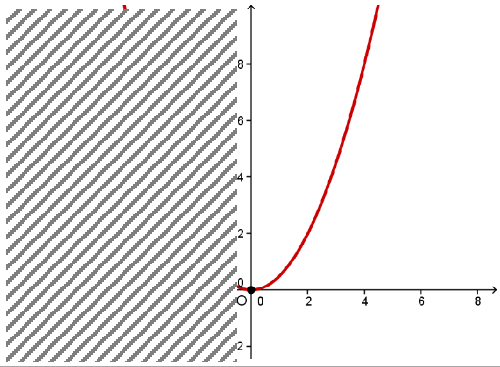
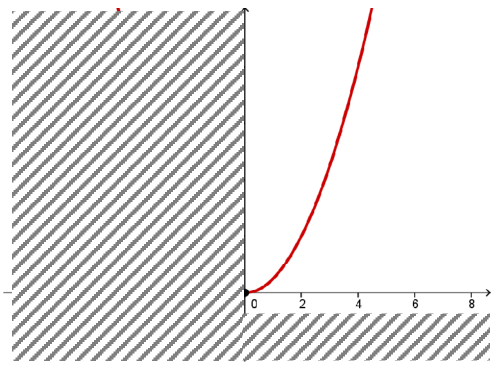


$f: R \longrightarrow R$ è una funzione biunivoca



$f: R \longrightarrow R$ non è una funzione biunivoca

Esempi

La funzione $f : R \longrightarrow R$ definita da $y = x^2$ non è né iniettiva, nè suriettiva	
La funzione $f : R \longrightarrow R^+$ definita da $y = x^2$ è suriettiva, ma non è iniettiva	
La funzione $f : R^+ \longrightarrow R$ definita da $y = x^2$ è iniettiva, ma non è suriettiva.	
La funzione $f : R^+ \longrightarrow R^+$ definita da $y = x^2$ è biunivoca.	

Funzione inversa

Data una funzione biunivoca f, il grafico della funzione inversa f^{-1} si ottiene simmetrizzando il grafico della funzione f rispetto alla bisettrice del I° e III° quadrante.

Esempio 1

La funzione lineare $y = ax + b$ è una funzione biunivoca $\forall x \in R$. Pertanto esiste la sua funzione inversa.

$$y = 2x + 4$$

Determiniamo la funzione inversa:

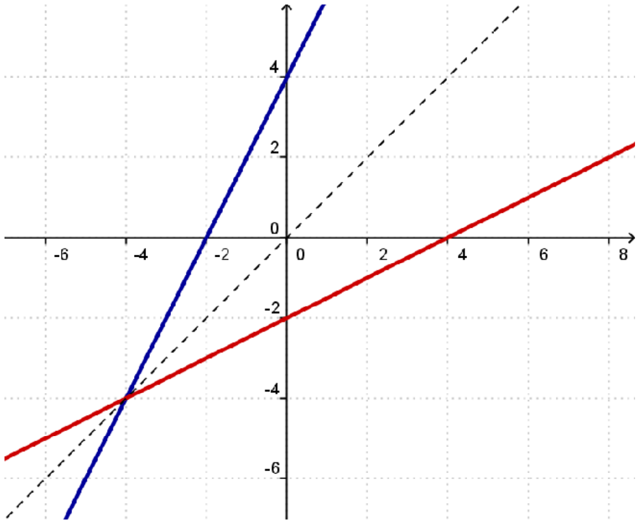
$-2x = -y + 4$

$2x = y - 4$

$x = \frac{1}{2}y - 2$

Per disegnarla nello stesso piano cartesiano occorre scambiare le variabili. Si ottiene pertanto:

$$y = \frac{1}{2}x - 2$$



Esempio 2

La funzione $y = ax^2$ considerata come funzione $f : R^+ \longrightarrow R^+$ è una funzione biunivoca.

Pertanto esiste la sua funzione inversa.

$$y = x^2$$

Determiniamo la funzione inversa:

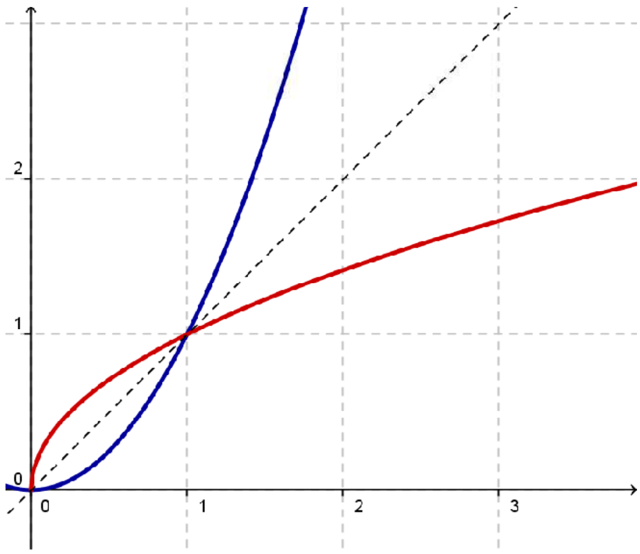
$-x^2 = -y$

$x^2 = y$

$x = \sqrt{y}$

Per disegnarla nello stesso piano cartesiano occorre scambiare le variabili. Si ottiene pertanto:

$$y = \sqrt{x}$$



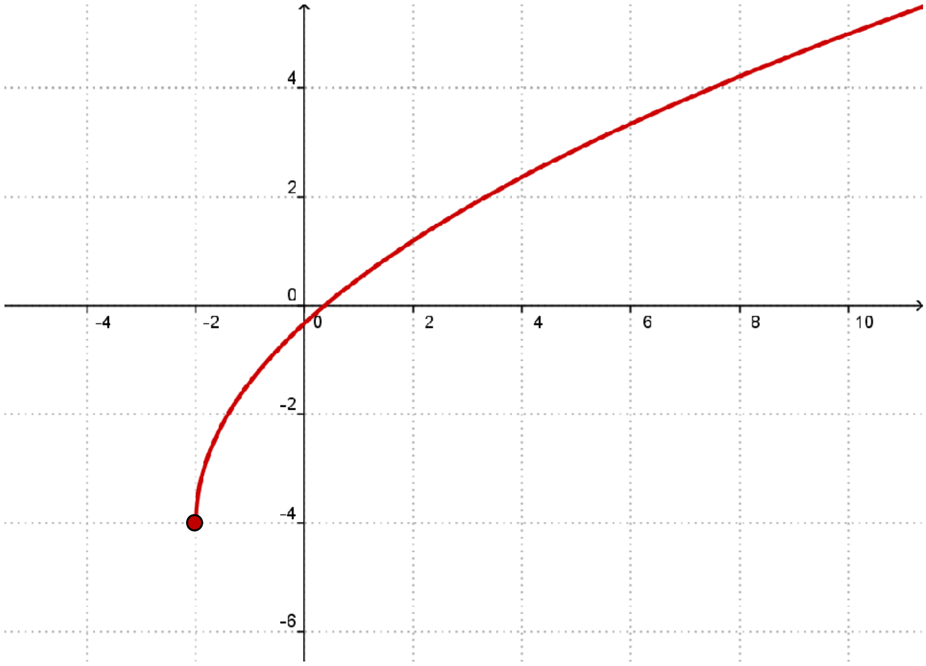
Dominio e codominio di una funzione

Il Dominio di una funzione è costituito da tutti i punti dell’asse x per i quali esiste il grafico della funzione.

Il Codominio di una funzione è costituito da tutti i punti dell’asse y per i quali esiste il grafico della funzione.

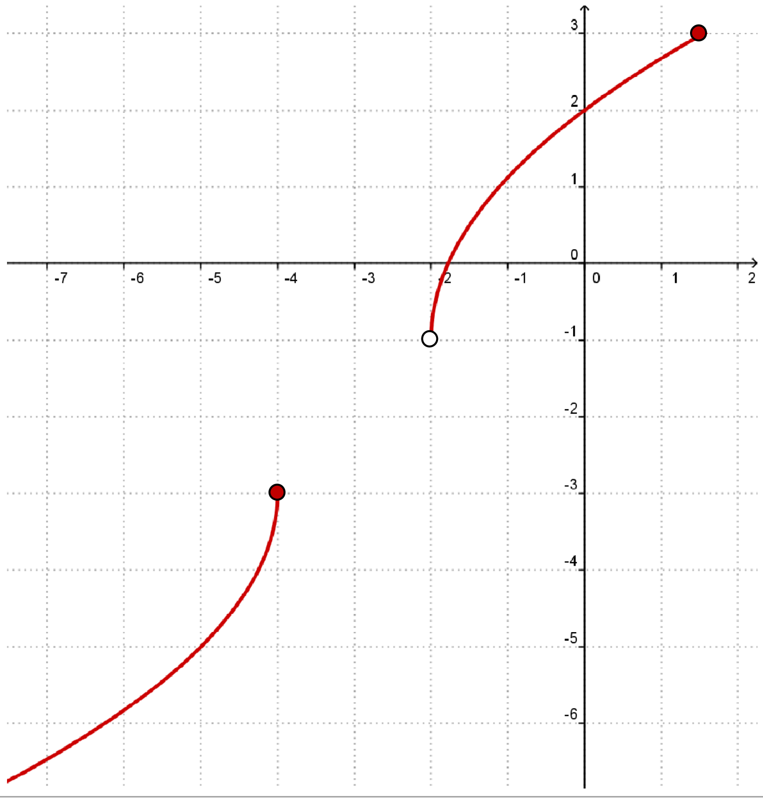
$$D = \{x \in R \;\; / \;\; x \geq -2\}$$

$$C = \{y \in R \;\; / \;\; y \geq -4\}$$



$$D = \left\{x \in R/x \leq -4\,;\; -2 < x \leq \frac{3}{2}\right\}$$

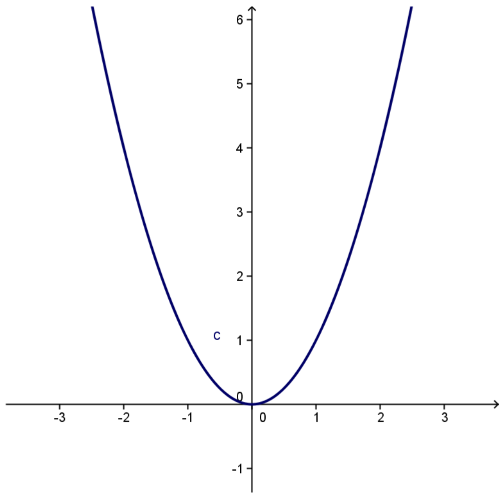
$$C = \{y \in R \,/\; x \leq -3\,;\; x > -1\}$$



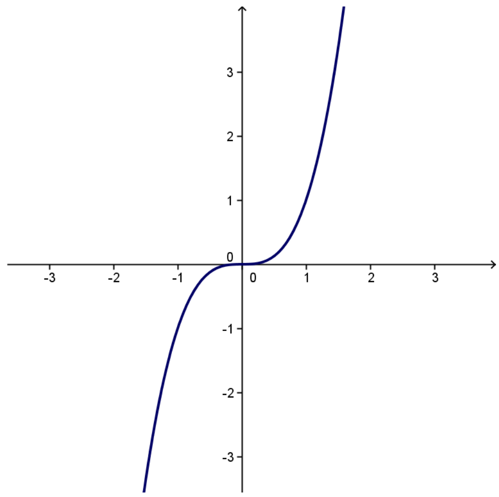
Altre funzioni

La funzione potenza $y = x^n$

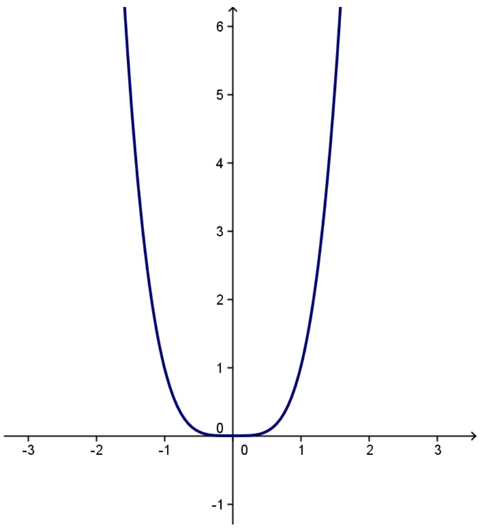
$y = x^2$



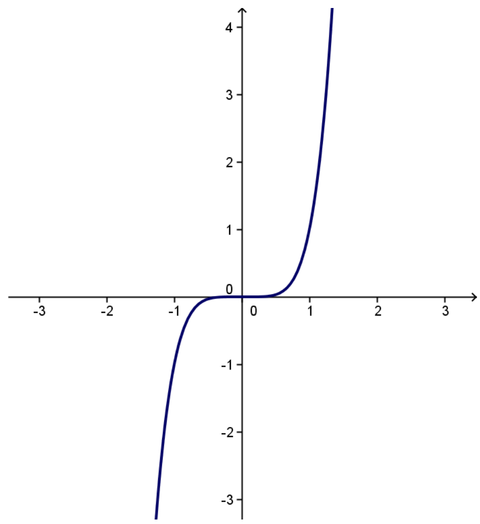
$y = x^3$



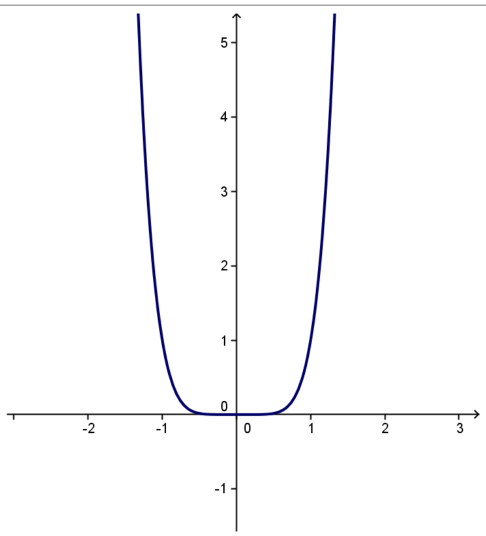
$y = x^4$



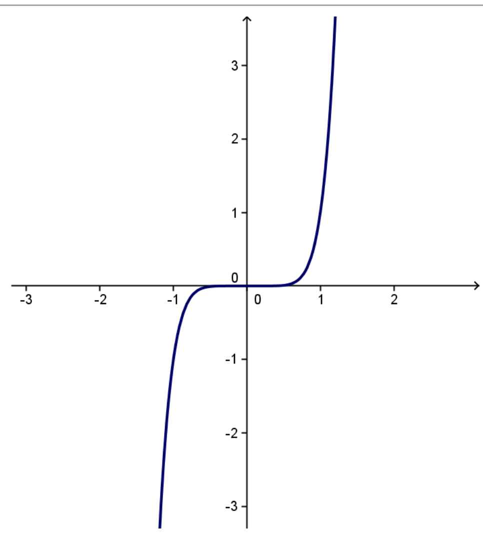
$y = x^5$



$y = x^n$ *pari*



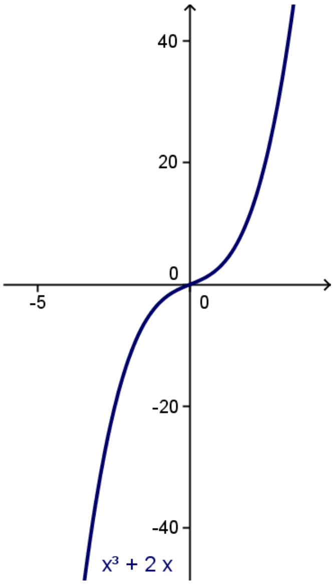
$y = x^n$ *dispari*



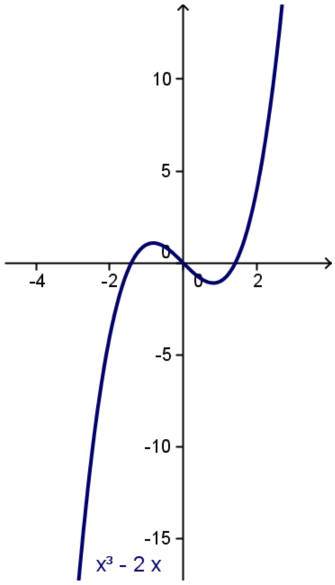
Al crescere dell'esponente la curva si schiaccia maggiormente nell'origine.

La funzione polinomiale $f(x)=x^3+k\,x$

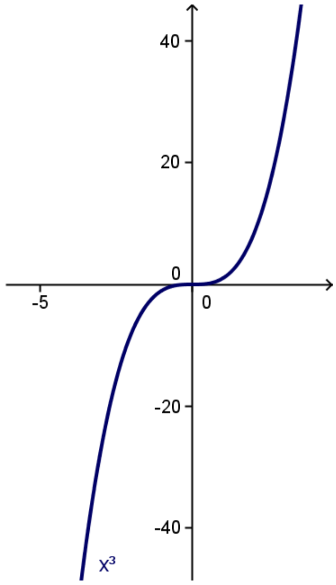
$k>0$



$k<0$

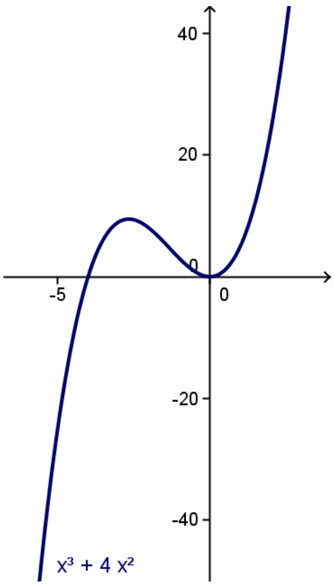


$k=0$

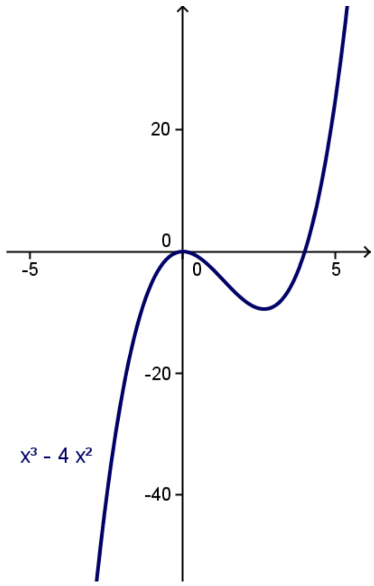


La funzione polinomiale $f(x)=x^3+k\,x^2$

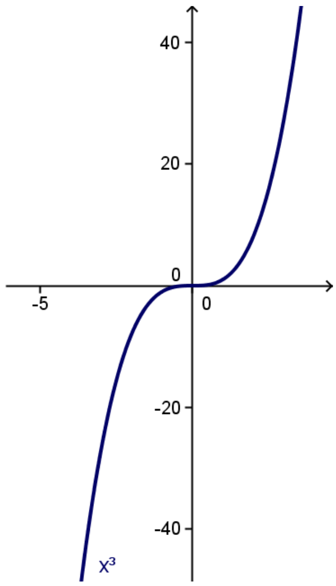
$k>0$

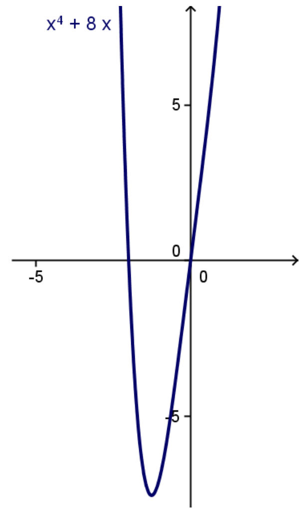
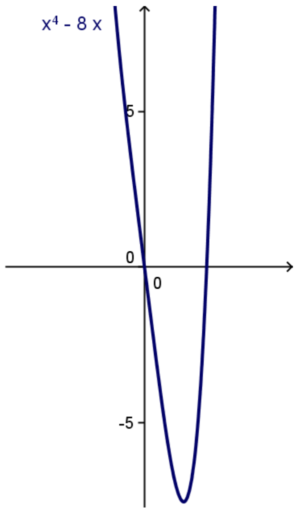
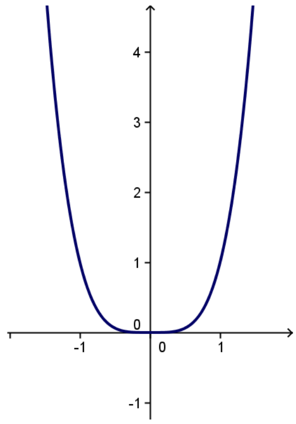


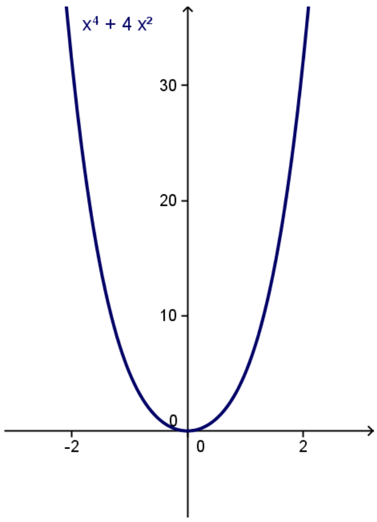
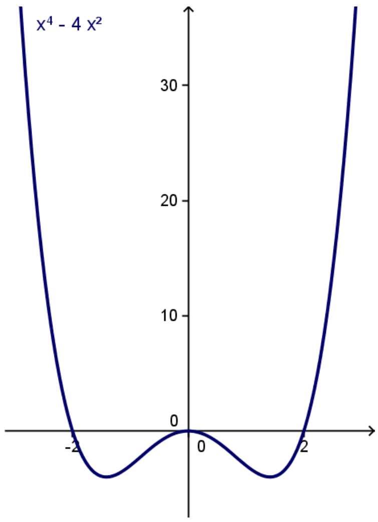
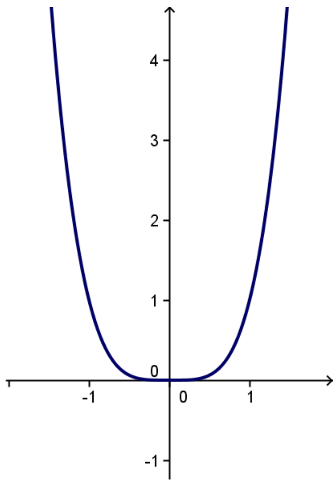
$k<0$

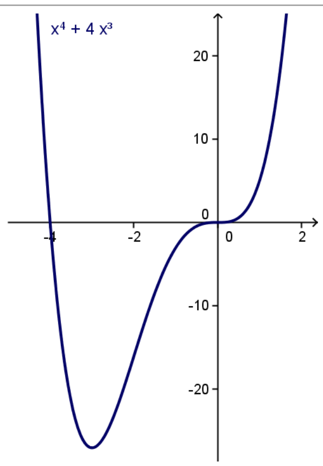
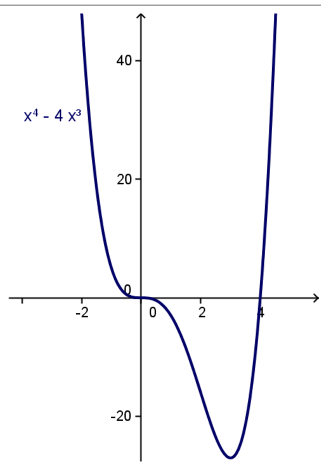
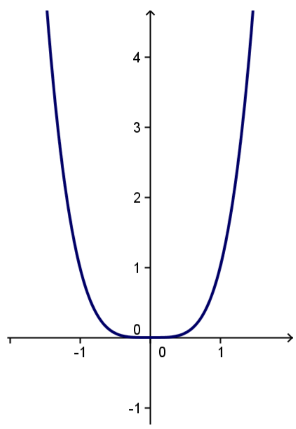


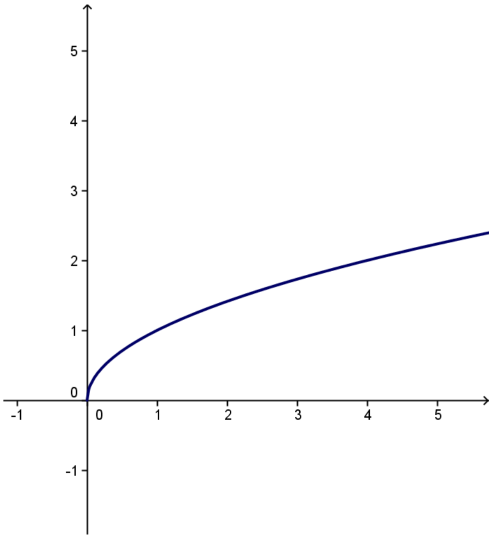
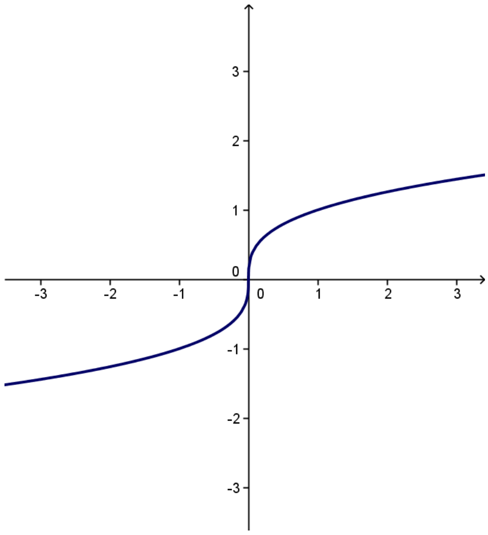
$k=0$

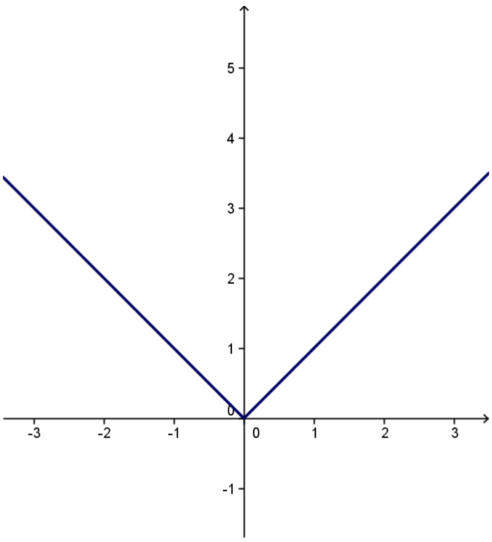
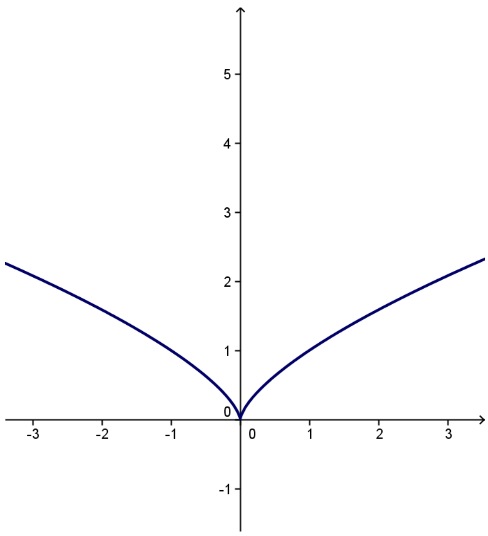


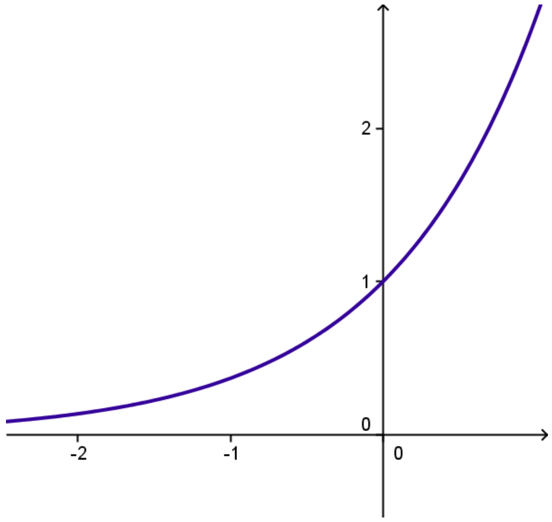
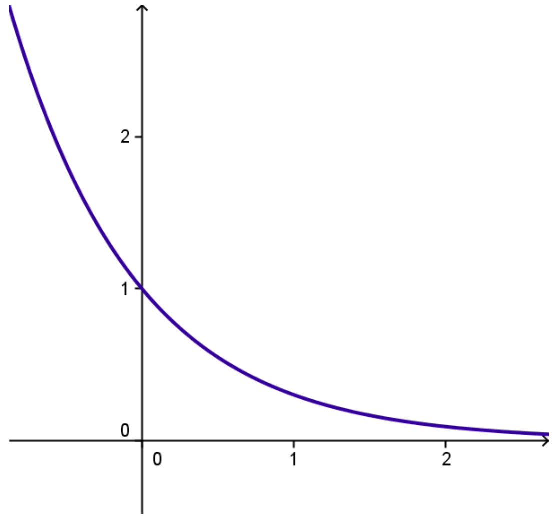
La funzione polinomiale $f(x)=x^4+k\,x$		
$k>0$	$k<0$	$k=0$
		

La funzione polinomiale $f(x)=x^4+k\,x^2$		
$k>0$	$k<0$	$k=0$
		

La funzione polinomiale $f(x)=x^4+k\,x^3$		
$k>0$	$k<0$	$k=0$
		

La funzione irrazionale $y = \sqrt[n]{x}$	
$y = \sqrt[2]{x}$	$y = \sqrt[3]{x}$
	

La funzione valore assoluto $y = \sqrt[2]{x^2} = \lvert x \rvert$	La funzione irrazionale $y = \sqrt[3]{x^2}$
	

La funzione esponenziale $y = a^x$	
$a > 1$	$0 < a < 1$
	

La funzione logaritmica $y = log_a x$	
$a > 1$	$0 < a < 1$