Esercizio x1 – Funzione inversa

Sia $f : \left]0, +\infty\right[\to R$ la funzione definita da: $f(x) = \begin{cases} \log x & se \quad 0 < x < 1 \\ a \cdot (x-1)^2 & se \quad x \geq 1 \end{cases}$

dove a è un parametro reale.

1. Per quali valori di a la funzione è invertibile ?
2. Per $a = 2$ scrivere la funzione inversa f^{-1}

Soluzione 1

La funzione $y = \log x$ *nell'intervallo* $(0,\ 1)$ *è crescente.*

La funzione $y = a \cdot (x-1)^2$

è una parabola: $y = ax^2 - 2ax + a$

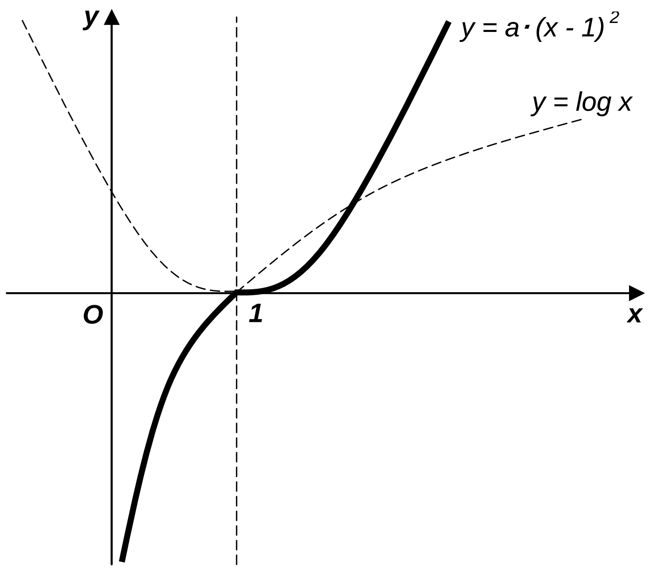
avente vertice in $V(1, 0)$.

$$x_V = -\frac{B}{2A} = -\frac{-2a}{2a} = 1$$

$$y_V = a \cdot (1-1)^2 = 0$$

Per $a > 0$: *volge la concavità verso l'alto e nell'intervallo* $\left[1, +\infty\right[$ *la funzione è crescente.*

Per $a < 0$: *volge la concavità verso il basso e nell'intervallo* $\left[1, +\infty\right[$ *la funzione è decrescente.*



In definitiva per $a > 0$ *la funzione:*

$f(x) = \begin{cases} \log x & se \quad 0 < x < 1 \\ a \cdot (x-1)^2 & se \quad x \geq 1 \end{cases}$ *è crescente, e quindi è invertibile.*

Soluzione 2

Per $a = 2$ $\quad f(x) = \begin{cases} \log x & se \quad 0 < x < 1 \\ 2 \cdot (x-1)^2 & se \quad x \geq 1 \end{cases}$

La funzione inversa di $y = \log x : (0,1) \to (-\infty, 0)$ è $x = e^y : (-\infty, 0) \to (0,1)$

La funzione inversa di $y = 2 \cdot (x-1)^2 : \left[1, +\infty\right[\to \left[0, +\infty\right[$ è $x = 1 + \sqrt{\frac{y}{2}} : \left[0, +\infty\right[\to \left[1, +\infty\right[$

Infatti: $y = 2 \cdot (x-1)^2$; $(x-1)^2 = \frac{y}{2}$; $x - 1 = \sqrt{\frac{y}{2}}$; $x = 1 + \sqrt{\frac{y}{2}}$: $\left[0, +\infty\right[\to \left[1, +\infty\right[$.

In definitiva la funzione inversa $f^{-1} : R \to (0, +\infty)$ *è :* $f^{-1}(y) = \begin{cases} e^y & se \quad y < 0 \\ 1 + \sqrt{\frac{y}{2}} & se \quad y \geq 0 \end{cases}$