

Esercizio x2 – Funzione continua

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da: $f(x) = \begin{cases} 5 \cdot e^{ax^2} + \cos bx & \text{se } x \leq 0 \\ ax + b & \text{se } x > 0 \end{cases}$

dove a e b sono parametri reali. Per quali valori di a e di b la funzione è continua ?

Soluzione

La funzione $y = 5 \cdot e^{ax^2} + \cos bx$, essendo formata da funzioni continue, è continua nell'intervallo $]-\infty, 0[$.

La funzione $y = ax + b$, essendo una retta, è continua nell'intervallo $]0, +\infty[$.

Affinché la funzione $f(x)$ sia continua anche in $x = 0$ deve risultare che:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (5 \cdot e^{ax^2} + \cos bx) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b).$$

$$\text{Essendo } \lim_{x \rightarrow 0^-} (5 \cdot e^{ax^2} + \cos bx) = 6 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = b \quad \Rightarrow \quad b = 6.$$

Inoltre, essendo il valore del limite $\lim_{x \rightarrow 0^-} (5 \cdot e^{ax^2} + \cos bx) = 6$ non dipendente dal parametro a , si conclude che la funzione $f(x)$ è continua in tutto il suo Dominio, $\forall a \in \mathbb{R}$ e $b = 6$.