

Esercizio x1 – Funzione continua

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da:
$$f(x) = \begin{cases} 5x^2 - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 1 + \frac{x}{a} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

dove a è un parametro reale diverso da zero. Per quali valori di a la funzione è continua ?

Soluzione

La funzione $y = 5x^2 - 1$, essendo una parabola, nell'intervallo $]-\infty, 1[$ è continua.

La funzione $y = 1 + \frac{x}{a}$, essendo una retta, nell'intervallo $]1, +\infty[$ è continua.

Affinché la funzione $f(x)$ sia continua anche in $x = 1$ deve risultare che: $\lim_{x \rightarrow 1^-} (5x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 + \frac{x}{a}\right)$.

Essendo $\lim_{x \rightarrow 1^-} (5x^2 - 1) = 4$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 + \frac{x}{a}\right) = 1 + \frac{1}{a}$,

imponendo l'uguaglianza fra questi due valori, si ha: $1 + \frac{1}{a} = 4$; $\frac{1}{a} = 3$; $a = \frac{1}{3}$.

In definitiva la funzione $f(x)$ è continua in tutto il suo Dominio per $a = \frac{1}{3}$.

Rappresentando graficamente le due funzioni si osserva quanto dimostrato.

