ESEMPIO x1 – Dominio di una funzione

Determinare il Dominio della funzione $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(\text{sen } x + \cos x)}$

Soluzione

Imponendo le condizioni di esistenza del logaritmo e del radicale si ottiene: $\begin{cases} \text{sen } x + \cos x > o \\ \log_{\frac{1}{2}}(\text{sen } x + \cos x) \geq 0 \end{cases}$

1) La disequazione $\text{sen } x + \cos x > 0$

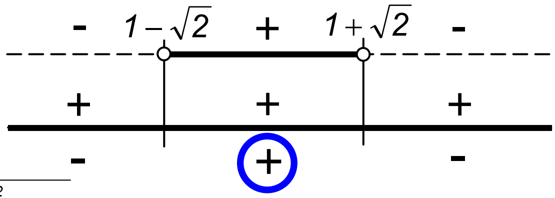
si risolve con l'utilizzo delle formule parametriche: $\text{sen } x = \dfrac{2 \cdot tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}$ $\qquad \cos x = \dfrac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}$

Sostituendo si ha: $\dfrac{2 \cdot tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} + \dfrac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} > 0$; *per comodità di calcoli si pone* $tg\frac{x}{2} = t$ *e si ottiene:*

$\dfrac{2t}{1+t^2} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2} > 0$; $\dfrac{2t+1-t^2}{1+t^2} > 0$; *essa si risolve discutendo i segni dei due termini:*

$2t + 1 - t^2 > 0 \qquad 1 - \sqrt{2} < t < 1 + \sqrt{2}$

$1 + t^2 > 0 \qquad \forall x \in R$



$2t + 1 - t^2 = 0$; $t^2 - 2t - 1 = 0$; $t_{1,2} = \dfrac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a \cdot c}}{a} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+1}}{1} = 1 \pm \sqrt{2}$

La soluzione di $\text{sen } x + \cos x > 0$ *è:* $1 - \sqrt{2} < t < 1 + \sqrt{2}$; *ricostituendo* $tg\frac{x}{2} = t$ *si ottiene:*

$1 - \sqrt{2} < tg\frac{x}{2} < 1 + \sqrt{2}$

Dal grafico della funzione tangente si ricava:

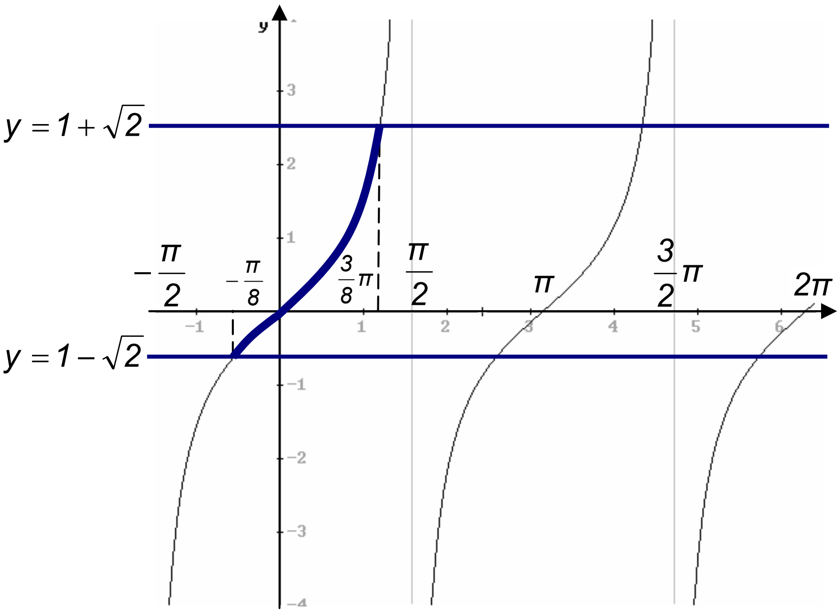
$-\frac{\pi}{8} < \frac{x}{2} < \frac{3}{8}\pi$

Ricordando che la funzione è periodica di periodo $T = \pi$ *si ottiene:*

$-\frac{\pi}{8} + k\pi < \frac{x}{2} < \frac{3}{8}\pi + k\pi$

cioè:

$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$.



2) $\log_{\frac{1}{2}}(\text{sen } x+\cos x)\ge 0$; $\quad \log_{\frac{1}{2}}(\text{sen } x+\cos x)\ge \log_{\frac{1}{2}} 1$; $\quad 0<\text{sen } x+\cos x\le 1$; avendo già risolto la prima delle disequazioni, si risolve: $\text{sen } x+\cos x\le 1$. Utilizzando le formule parametriche si ha:

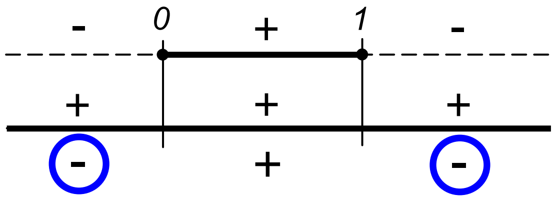
$$\frac{2\cdot tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}\le 1$$; per comodità si pone $tg\frac{x}{2}=t$ e si ottiene:

$$\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\le 1\ ;\quad \frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}-1\le 0\ ;\quad \frac{2t+1-t^2-1-t^2}{1+t^2}\le 0\ ;\quad \frac{2t-2t^2}{1+t^2}\le 0$$

essa si risolve discutendo i segni dei due termini:

$2t-2t^2\ge 0 \qquad 0\le t\le 1$

$1+t^2>0 \qquad \forall x\in R$



$$2t-2t^2>0\ ;\quad 2t-2t^2=0\ ;\quad t\cdot(2-2t)=0\ ;\quad \begin{array}{l} t=0 \\ 2-2t=0 \quad 2t=2 \quad t=1 \end{array}$$

La soluzione di $\log_{\frac{1}{2}}(\text{sen } x+\cos x)\ge 0$ è: $t\le 0$; $t\ge 1$;

sostituendo $tg\frac{x}{2}=t$ si ottiene: $tg\frac{x}{2}\le 0$; $tg\frac{x}{2}\ge 1$

Dal grafico della funzione tangente si ricava:

$-90°<\frac{x}{2}\le 0°$; $45°\le\frac{x}{2}<90°$

ricordando che la funzione è periodica di periodo $T=\pi$ si ottiene:

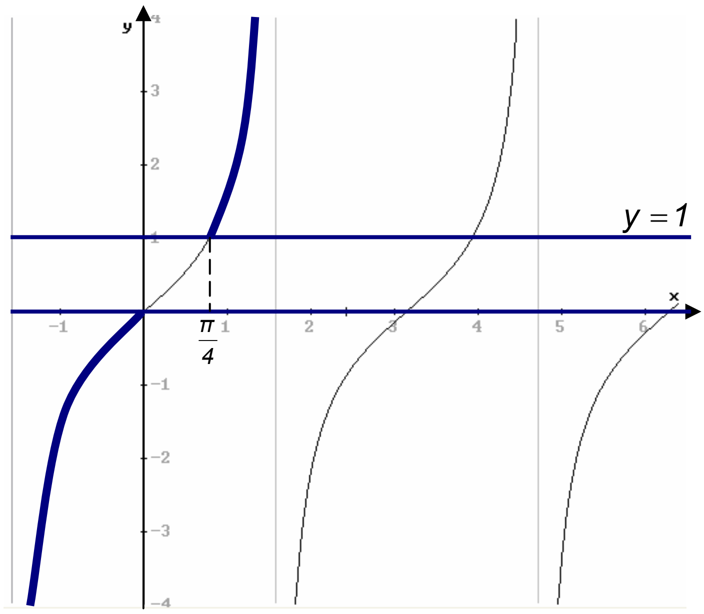
$-\frac{\pi}{2}+k\pi<\frac{x}{2}\le 0+k\pi$;

$\frac{\pi}{4}+k\pi\le\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}+k\pi$

moltiplicando per 2 :

$-\pi+2k\pi<x\le 0+2k\pi$;

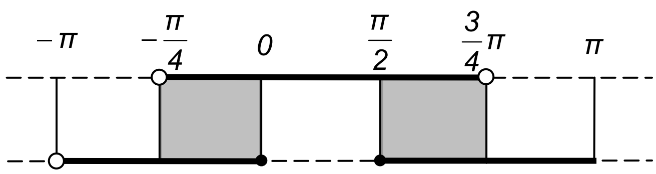
$\frac{\pi}{2}+2k\pi\le x<\pi+2k\pi$



Ritornando al sistema iniziale si ha:

$$\begin{cases} \text{sen } x+\cos x>o \\ \log_{\frac{1}{2}}(\text{sen } x+\cos x)\ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{3}{4}\pi+2k\pi \\ -\pi+2k\pi<x\le 0+2k\pi\ ;\quad \frac{\pi}{2}+2k\pi\le x<\pi+2k\pi \end{cases}$$



Pertanto il Dominio è: $Dom(f)=\left\{x\in R\,/-\frac{\pi}{4}+2k\pi<x\le 2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\le x<\frac{3}{4}\pi+2k\pi\right\}$.