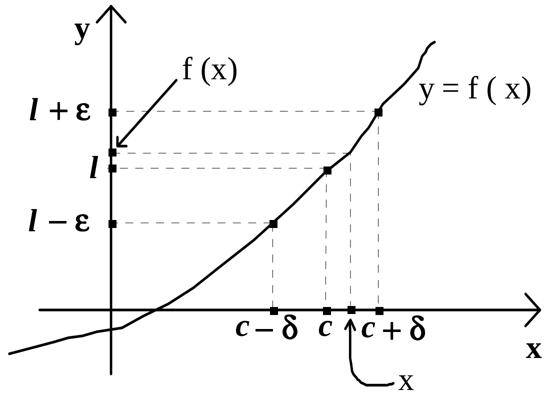
Limite finito per una funzione in un punto

Sia $f(x)$ una funzione reale definita nello insieme D, e c un punto di accumulazione per D.
Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite il numero reale L, al tendere di x al numero reale c, e si scrive:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

quando, in corrispondenza ad un qualsiasi intorno completo ***I*** di L, scelto piccolo a piacere, è sempre possibile determinare un intorno completo H del punto c, tale che per tutti i punti x del dominio D della funzione ed appartenenti a tale intorno H, escluso al più il punto c (dove la funzione può non essere definita), i corrispondenti valori $f(x)$ della funzione cadono nell'intorno ***I*** di L.

In simboli :
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad t.c. \quad \forall x \in D \cap (c - \delta, c + \delta)$
$e \quad x \neq c \quad si \ ha \ che \quad |f(x) - L| < \varepsilon$



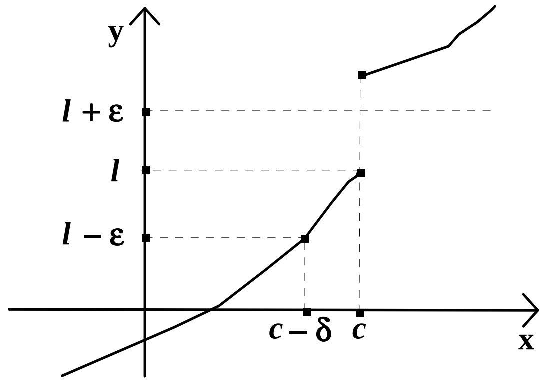
Limite sinistro

Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite il numero reale L, al tendere di ***x*** al numero reale ***c*** da sinistra, e si scrive:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

quando, in corrispondenza ad un qualsiasi intorno completo ***I*** di L, scelto piccolo a piacere, è sempre possibile determinare un intorno sinistro ***H*** del punto ***c***, tale che per tutti i punti ***x*** del dominio ***D*** della funzione ed appartenenti a tale intorno ***H***, escluso al più il punto ***c*** (dove la funzione può non essere definita), i corrispondenti valori $f(x)$ della funzione cadono nell'intorno ***I*** di L.

In simboli :
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad t.c. \quad \forall x \in D \cap (c - \delta, c)$
$e \quad x \neq c \quad si \ ha \ che \quad |f(x) - L| < \varepsilon$



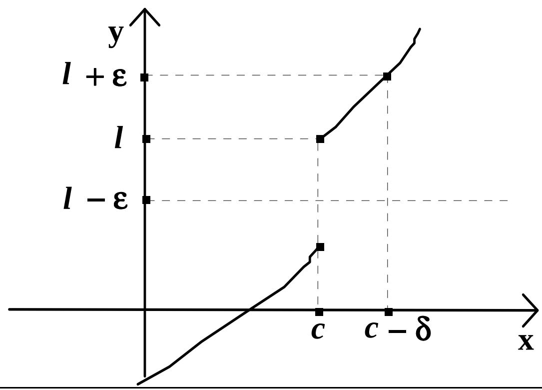
Limite destro

Si dice che la funzione ***f(x)*** ha per limite il numero reale L, al tendere di ***x*** al numero reale ***c*** da destra, e si scrive:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

quando, in corrispondenza ad un qualsiasi intorno completo ***I*** di L, scelto piccolo a piacere, è sempre possibile determinare un intorno destro ***H*** del punto ***c***, tale che per tutti i punti ***x*** del dominio ***D*** della funzione ed appartenenti a tale intorno ***H***, escluso al più il punto ***c*** (dove la funzione può non essere definita), i corrispondenti valori ***f(x)*** della funzione cadono nell'intorno ***I*** di L.

In simboli :
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad t.c. \quad \forall x \in D \cap (c, \ c + \delta)$
$e \quad x \neq c \quad si \ ha \ che \quad |f(x) - L| < \varepsilon$



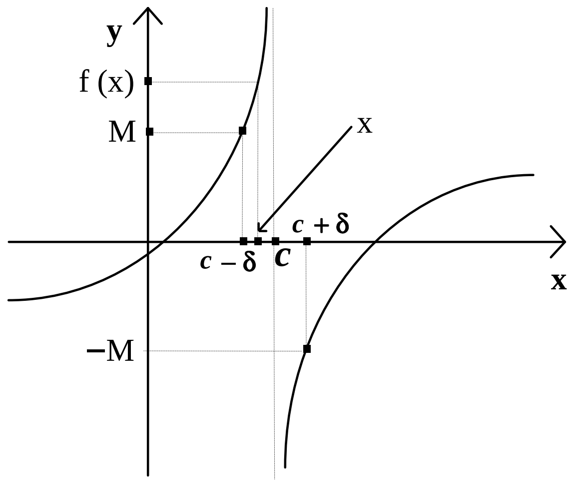
Limite infinito per una funzione in un punto

Sia $f(x)$ una funzione reale definita nell'insieme ***D***, e ***c*** un punto di accumulazione per ***D***.
Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite l'infinito ***∞***, al tendere di ***x*** al numero reale ***c***, e si scrive :

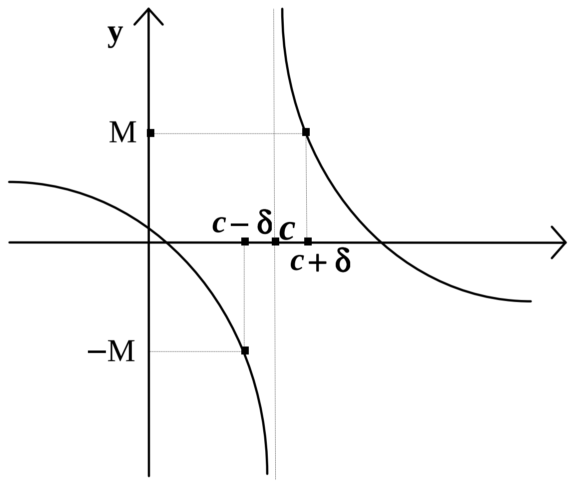
$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

quando, in corrispondenza ad un qualsiasi intorno completo di infinito ***I*** = (–∞, –M) ∪ (M, +∞), con $M > 0$ scelto grande a piacere, è sempre possibile determinare un intorno completo ***H*** del punto ***c***, tale che per tutti i punti ***x*** del dominio ***D*** della funzione ed appartenenti a tale intorno ***H***, escluso al più il punto ***c*** (dove la funzione può non essere definita), i corrispondenti valori ***f(x)*** della funzione cadono nell'intorno ***I*** di infinito.

In simboli : $\forall M > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; t.c. \;\; \forall x \in D \cap (c - \delta, c + \delta) \;\; e \;\; x \neq c \;\; si \;\; ha \;\; che \;\; |f(x)| > M$



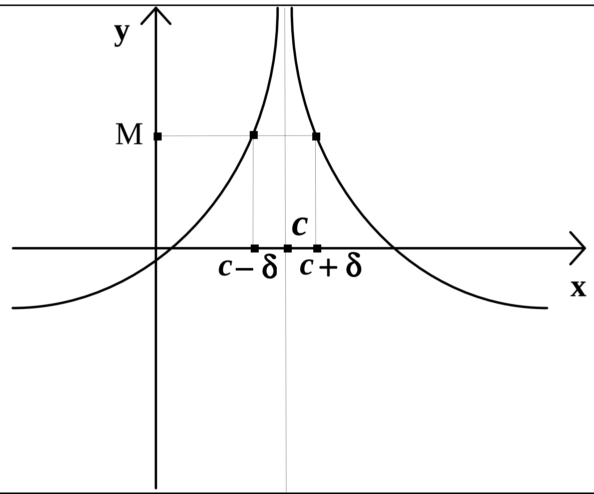
$\lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$



$\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to c^+} f(x) = +\infty$

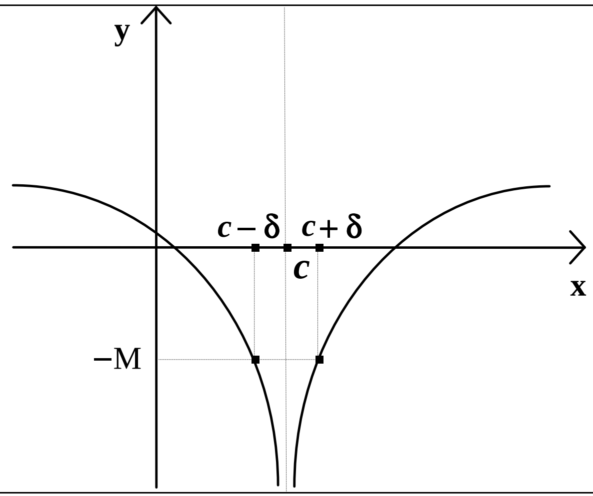
Altri sottocasi

$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$$



$\forall M > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; t.c. \;\; \forall x \in D \cap (c - \delta, c + \delta)$
$e \;\; x \neq c \;\; si \;\; ha \;\; che \;\; f(x) > M$

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$



$\forall M > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; t.c. \;\; \forall x \in D \cap (c - \delta, c + \delta)$
$e \;\; x \neq c \;\; si \;\; ha \;\; che \;\; f(x) < -M$

LIMITE FINITO PER UNA FUNZIONE ALL'INFINITO

Limite finito per una funzione all'infinito

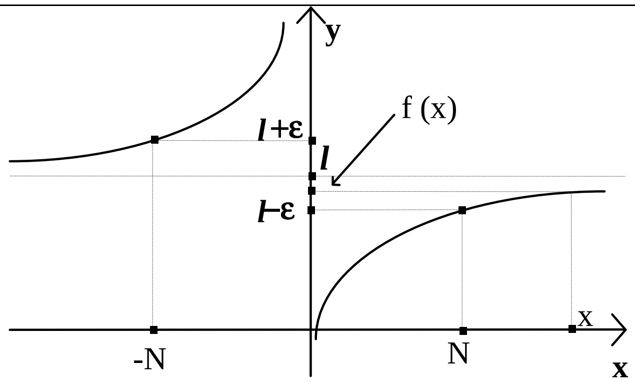
Sia $f(x)$ una funzione reale definita nell'insieme D .

Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite il numero reale L, al tendere di x all'infinito ∞, e si scrive :

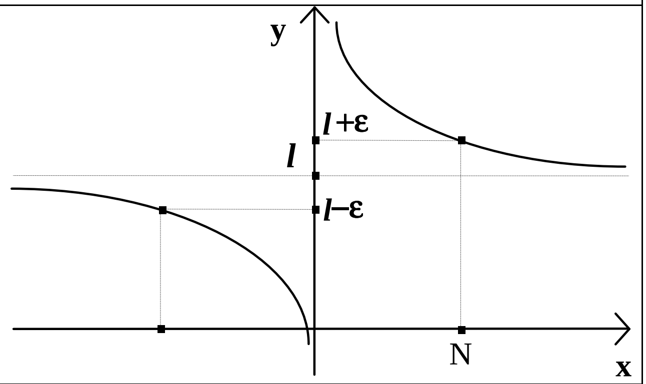
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

quando, in corrispondenza ad un qualsiasi intorno completo ***I*** di L , scelto piccolo a piacere, è sempre possibile determinare un intorno completo di infinito ***H*** = (–∞, –N) U (N, +∞), tale che per tutti i punti ***x*** del dominio ***D*** della funzione ed appartenenti all'intorno di infinito ***H*** , i corrispondenti valori $f(x)$ della funzione cadono nell'intorno ***I*** di L .

In simboli : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad t.c. \quad \forall x \in D \quad e \quad |x| > N \quad si \;\; ha \;\; che \quad |f(x) - l| < \varepsilon$



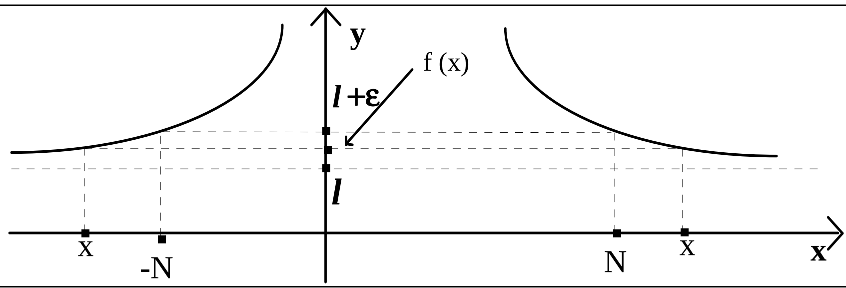
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L^+$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = L^-$



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L^-$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = L^+$

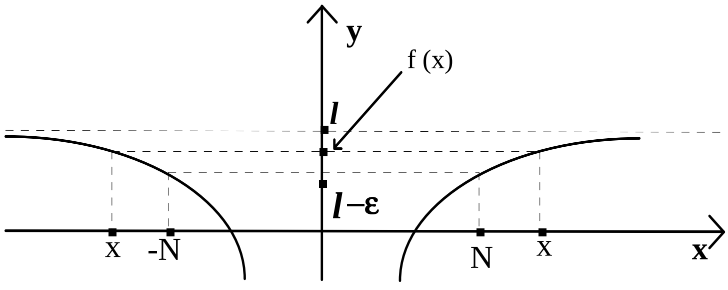
Altri sottocasi

$\lim_{x \to \infty} f(x) = L^+$



In simboli : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad t.c. \quad \forall x \in D \quad e \quad |x| > N \quad si \;\; ha \;\; che \quad f(x) \in (l, l + \varepsilon)$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = L^-$



In simboli : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad t.c. \quad \forall x \in D \quad e \quad |x| > N \quad si \;\; ha \;\; che \quad f(x) \in (l - \varepsilon, l)$

Limite infinito per una funzione all'infinito

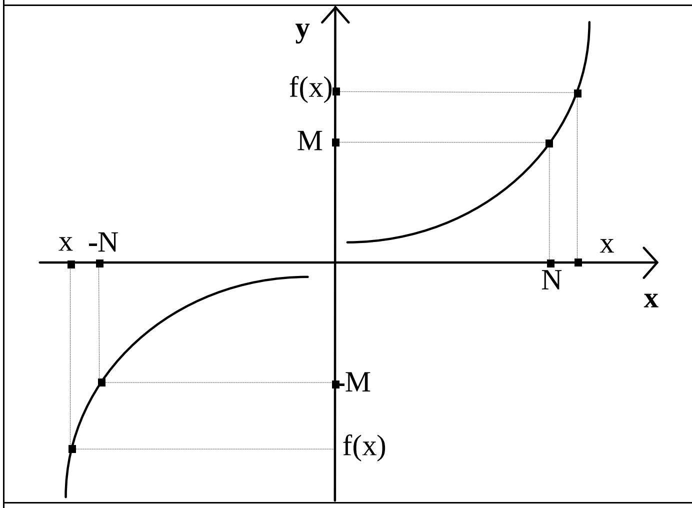
Sia $f(x)$ una funzione reale definita nell'insieme ***D*** .

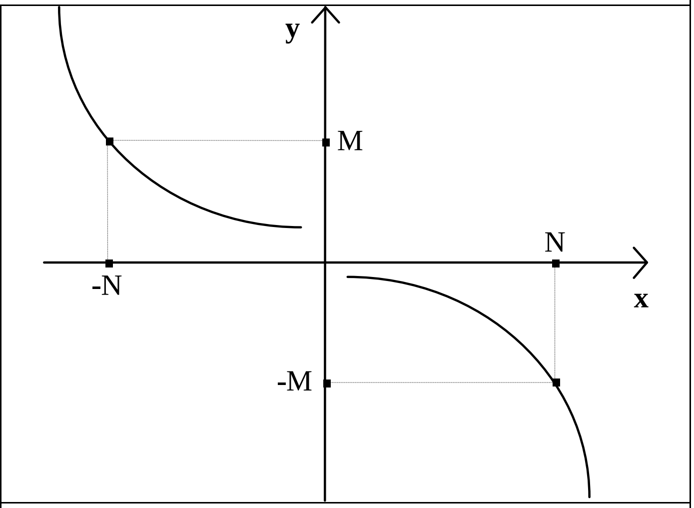
Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite l'infinito **∞**, al tendere di ***x*** all'infinito **∞**, e si scrive :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

quando, in corrispondenza ad un qualsiasi intorno completo di infinito ***I*** = (−∞, −M) U (M, +∞), con M>0 scelto grande a piacere, è sempre possibile determinare un intorno completo di infinito ***H***=(−∞, −N) U (N,+∞) , tale che per tutti i punti ***x*** del dominio ***D*** della funzione ed appartenenti all'intorno di infinito ***H*** , i corrispondenti valori $f(x)$ della funzione cadono nell'intorno ***I*** di infinito **∞** .

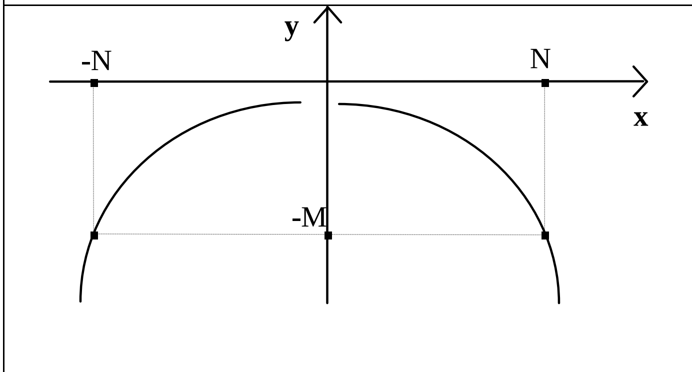
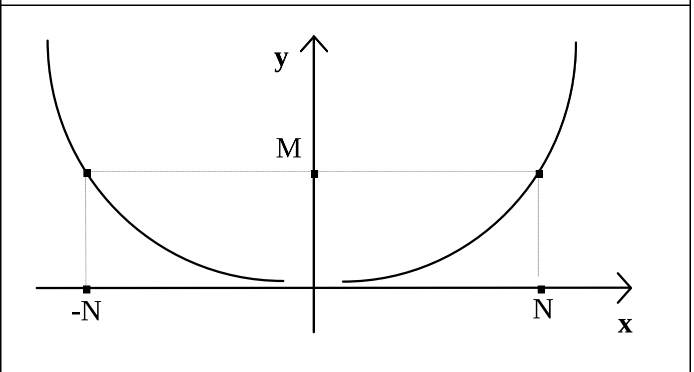
In simboli : $\forall M > 0 \;\; \exists N > 0 \;\; t.c. \;\; \forall x \in D \;\; e \;\; |x| > N \;\; si \;\; ha \;\; che \;\; |f(x)| > M$





$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Altri sottocasi

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$
	
$\forall M > 0 \;\; \exists N > 0 \;\; t.c. \;\; \forall x \in D \;\; e$ $\lvert x \rvert > N \;\; si \;\; ha \;\; che \;\; f(x) < -M$	$\forall M > 0 \;\; \exists N > 0 \;\; t.c. \;\; \forall x \in D \;\; e$ $\lvert x \rvert > N \;\; si \;\; ha \;\; che \;\; f(x) > M$

Teorema dell'unicità del limite

$$\left(Se \;\; esiste \;\; il \quad \lim_{x \to c} f(x) = L \right) \quad \Rightarrow \quad \left(il \;\; limite \;\; L \;\; è \;\; unico \right)$$

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che $\lim_{x \to c} f(x) = L$ e $\lim_{x \to c} f(x) = M$ con $L < M$

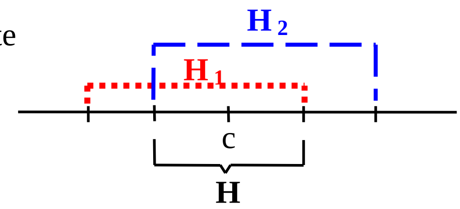
allora, per la definizione di limite, $\forall \; \varepsilon > 0$ esistono due intorni, H_1 e H_2 di c tale che:

$\forall x \in H_1$, escluso al più il punto c, si ha $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ e

$\forall x \in H_1$, escluso al più il punto c, si ha $M - \varepsilon < f(x) < M + \varepsilon$

Nell'intorno $H_1 \cap H_2$ le relazioni suddette valgono simultaneamente

Avendo supposto $L < M$ si ha:



$L - \varepsilon < m - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon < m + \varepsilon$ da cui si ha:

$m - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \; ; \quad m - \varepsilon < L + \varepsilon \; ;$

$m - L < 2 \cdot \varepsilon \; ;$ cioè $\varepsilon > \dfrac{m - L}{2}$.

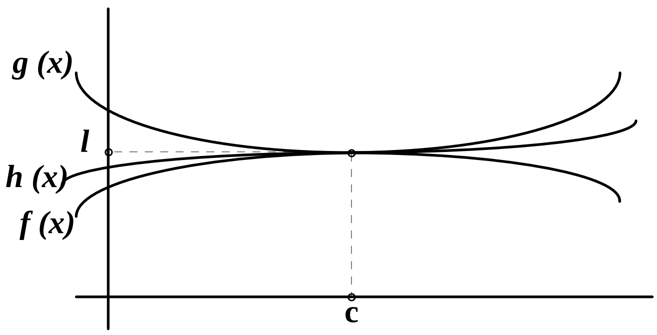
E questa condizione su ε contraddice la definizione di limite, secondo il quale ε deve poter essere un numero positivo qualunque . E quindi assurdo supporre che la funzione abbia in c due limiti diversi. Similmente si dimostrano gli altri casi (limite infinito, limite per x tendente all'infinito).

Teorema della permanenza del segno

$$\left(Se \;\; esiste \;\; il \quad \lim_{x \to c} f(x) = L \neq 0 \right) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} Esiste \;\; un \;\; intorno \;\; I \;\; del \; punto \; c, \; tale \; che \\ \forall x \in I \;\; e \quad x \neq c \quad la \; funzione \;\; assume \;\; valori \\ dello \;\; stesso \;\; segno \;\; del \;\; suo \;\; limite \, . \end{pmatrix}$$

Teorema del confronto o dei due carabinieri

$$\begin{pmatrix} \text{Se } f(x),\ h(x) \text{ e } g(x) \text{ sono tre funzioni} \\ \text{definite nello stesso intervallo } (a,b), \\ \text{escluso al più un punto } c \text{ di esso e se} \\ \text{risulta } \forall x \in (a,b) \text{ che:} \\ f(x) \leq h(x) \leq g(x) \\ \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = l \neq 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\lim_{x \to c} h(x) = l \right)$$



Una funzione $f(x)$, definita in $[a,b]$, è **continua** nel punto $c \in [a,b]$ se risulta che $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Una funzione $f(x)$ è **continua a destra** del punto c se risulta che $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$

Una funzione $f(x)$ è **continua a sinistra** del punto c se risulta che $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$

Una funzione $f(x)$ è **continua nell'intervallo** $[a,b]$ se essa è continua in ogni punto $c \in [a,b]$.

Teorema 1

Se $f(x)$ *e* $g(x)$ sono due funzioni continue in un punto c, allora sono continue nel punto c anche le funzioni $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)+g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Teorema 2

Se $g(x)$ è continua nel punto x_0 e $f(z)$ è continua nel punto $z_0 = g(x_0)$, allora la funzione composta $f\left(g(x_0)\right)$ è continua nel punto x_0.

Teorema 3

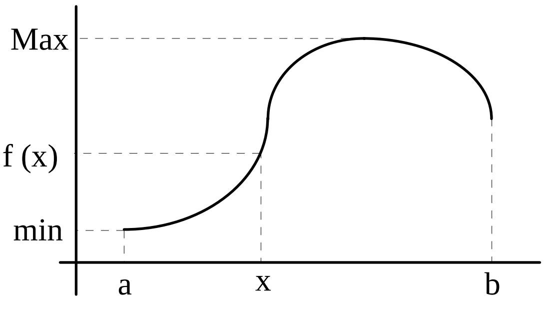
Un funzione $y = f(x)$ continua in un intervallo $[a,b]$ nel quale è crescente (*o decrescente*), definisce una funzione inversa $x = g(y)$ che è continua e crescente (*o decrescente*) nell'intervallo $[m,M]$, dove m e M sono rispettivamente il minimo ed il massimo della $y = f(x)$ in $[a,b]$.

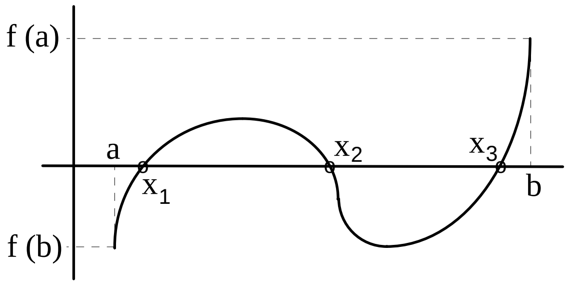
Teorema di Weierstrass

$$\begin{pmatrix} \textit{Se } f(x) \textit{ è continua in} \\ \textit{un intervallo chiuso } [a,b] \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} f(x) \textit{ assume in } [a,b] \textit{ il massimo} \\ \textit{assoluto e il minimo assoluto} \end{pmatrix}$$

Teorema di Darboux-Bolzano

$$\begin{pmatrix} \textit{Se } f(x) \textit{ è continua in un} \\ \textit{intervallo chiuso } [a,b] \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} f(x) \textit{ assume in } [a,b] \textit{ ogni valore compreso} \\ \textit{fra il suo minimo e il suo massimo assoluto} \end{pmatrix}$$





Teorema dell'esistenza degli zeri

$$\begin{pmatrix} \textit{Se } f(x) \textit{ è continua in un intervallo chiuso} \\ [a,b] \textit{, e se agli estremi dell'intervallo} \\ \textit{assume valori di segno opposto} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} f(x) \textit{ si annulla in almeno un punto} \\ \textit{interno all'intervallo } [a,b] \end{pmatrix}$$

La conoscenza della continuità di una funzione $f(x)$ in un punto c, è un'informazione molto importante per il calcolo del suo limite. Infatti, in questo caso, non solo esiste il $\lim f(x)$, ma il valore di tale limite coincide con $f(c)$. Pertanto il calcolo del limite si riduce al calcolo del valore $f(c)$.

Di seguito sono elencate le principali funzioni continue:

La funzione ***razionale intera*** $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ è continua $\forall x \in R$.

La funzione ***razionale fratta*** $y = \frac{N(x)}{D(x)}$ è continua nell'insieme $\{ x \in R \ / \ D(x) \neq 0 \}$.

La funzione ***irrazionale di indice dispari*** $y = \sqrt[dispari]{f(x)}$ è continua $\forall x \in R$.

La funzione ***irrazionale di indice pari*** $y = \sqrt[pari]{f(x)}$ è continua nell'insieme $\{ x \in R \ / \ f(x) \geq 0 \}$.

La funzione logaritmica $y = \log_a f(x)$ è continua nell'insieme $\{ x \in R \ / \ f(x) > 0 \}$.

La funzione ***esponenziale*** $y = a^{f(x)}$ è continua $\forall x \in R$.

La funzione ***esponenziale*** $y = f(x)^{g(x)}$ è continua nell'insieme $\{ x \in R \ / \ f(x) > 0 \}$.

Le funzioni ***goniometriche*** $y = sen\ f(x)$ e $y = \cos\ f(x)$ sono continue $\forall x \in R$.

La funzione ***goniometrica*** $y = tg\ f(x)$ è continua nell'insieme $\left\{ x \in R \ / \ f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$

La funzione ***goniometrica*** $y = \cot g\ f(x)$ è continua nell'insieme $\{ x \in R \ / \ f(x) \neq k\pi \}$

La funzione ***goniometrica*** $y = arcsen\ f(x)$ è continua nell'insieme $\{ x \in R \ / \ -1 \leq f(x) \leq 1 \}$.

La funzione ***goniometrica*** $y = ar\cos\ f(x)$ è continua nell'insieme $\{ x \in R \ / \ -1 \leq f(x) \leq 1 \}$.

Le funzioni ***goniometriche*** $y = arctg\ f(x)$ e $y = arc\cot g\ f(x)$ sono continue $\forall x \in R$.

PUNTI DI DISCONTINUITA' PER UNA FUNZIONE

I punti di discontinuità di una funzione si dividono in tre specie :

I^a specie : la funzione $f(x)$ ha nel punto c una discontinuità di I^a specie, se in tale punto esistono finiti destro e sinistro e sono fra loro diversi.

II^a specie : la funzione $f(x)$ ha nel punto c una discontinuità di II^a specie, se in tale punto uno almeno dei due limiti destro e sinistro è infinito oppure non esiste.

III^a specie : la funzione $f(x)$ ha nel punto c una discontinuità di III^a specie (o eliminabile), se in tale punto esiste finito il limite, ma il valore di $f(c)$ o non esiste, oppure esiste ma risulta diverso dal limite.

Esempio 1

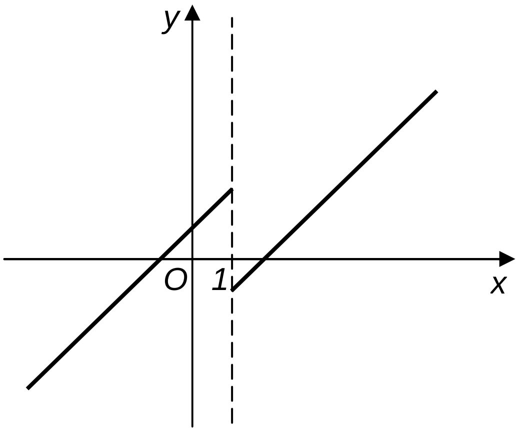
La funzione $f(x)=\begin{cases} x-2 & se\ \ x\geq 1 \\ x+1 & se\ \ x<1 \end{cases}$ è continua $\forall x\neq 1$.

In $x=1$ la funzione ha una discontinuità di I^a specie.

Infatti $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-2) = -1$ mentre

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x+1) = 2$.

Dal grafico si nota il salto che la funzione ha in $x=1$.

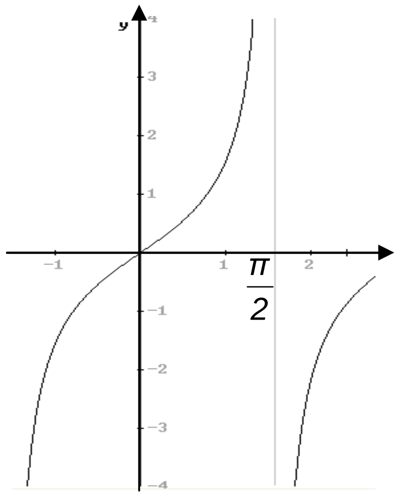


Esempio 2

La funzione $f(x)=tg\ x$ è continua $\forall x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi$.

In $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ la funzione ha una discontinuità di II^a specie.

Infatti $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} tg\ x=-\infty$ e $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} tg\ x=+\infty$.



Esempio 3

La funzione $f(x)=\frac{sen\ x}{x}$ è continua $\forall x\neq 0$.

In $x=0$ la funzione ha una discontinuità di III^a specie.

Infatti $\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x}=1$ mentre $f(0)$ non esiste, poiché il dominio di $f(x)$ è $R-\{0\}$.

Tale tipo di discontinuità è detta anche *eliminabile*, perché ridefinendo la funzione nel seguente modo:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & se\ \ x=0 \\ \frac{sen\ x}{x} & se\ \ x\neq 0 \end{cases}$$

la funzione diventa continua in tutto R.

ALGEBRA DEI LIMITI

Somma e prodotto

$n + \infty = +\infty$	$n - \infty = -\infty$	$+\infty + \infty = +\infty$	$-\infty - \infty = -\infty$	$n \bullet \infty = \infty$	$\infty \bullet \infty = \infty$

Quoziente

$\frac{0}{n} = 0$	$\frac{0}{\infty} = 0$	$\frac{n}{\infty} = 0$	$\frac{n}{0} = \infty$	$\frac{\infty}{0} = \infty$	$\frac{\infty}{n} = \infty$

Potenza

$0^{n>0} = 0$	$n^0 = 1$	$(0 < n < 1)^{-\infty} = +\infty$	$+\infty^{-\infty} = 0^+$
$0^{n<0} = +\infty$	$(n > 1)^{+\infty} = +\infty$	$+\infty^{(m>0)} = +\infty$	
$0^{+\infty} = 0$	$(n > 1)^{-\infty} = 0^+$	$+\infty^{(m<0)} = 0^+$	
$0^{-\infty} = +\infty$	$(0 < n < 1)^{+\infty} = 0^+$	$+\infty^{+\infty} = +\infty$	
$(-\infty)^{(\text{pari}>0)} = +\infty$		$(-\infty)^{(\text{pari}<0)} = 0^+$	
$(-\infty)^{(\text{dispari}>0)} = -\infty$		$(-\infty)^{(\text{dispari}<0)} = 0^-$	

Forme indeterminate

$+\infty - \infty = ?$	$-\infty + \infty = ?$	$0 \bullet \infty = ?$	$\frac{0}{0} = ?$	$\frac{\infty}{\infty} = ?$	$0^0 = ?$	$\infty^0 = ?$	$1^\infty = ?$

Limiti fondamentali

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Limiti derivati dai limiti fondamentali

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\text{tg}\, x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\log_e (1 + x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\log_b (1 + x)}{x} = \frac{1}{\log_e b}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{a^x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \cdot \log x = 0 \quad (\alpha > 0) \qquad \lim_{x \to +\infty} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} e^{[g(x) \cdot \log f(x)]}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \text{sen}\, x = \text{non esiste} \qquad \lim_{x \to +\infty} \cos x = \text{non esiste}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

Dimostrazioni

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}=?\right).\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2\cdot(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2\cdot(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x} = 1\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\left(\frac{0}{0}=?\right).\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\cdot(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\cdot(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\operatorname{sen} x\cdot\frac{1}{1+\cos x} = 1\cdot 0\cdot\frac{1}{2} = 0.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left(\frac{0}{0}=?\right).\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$= 1\cdot\frac{1}{1} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1^{\infty}=?).$$ *Si pone* $x=\frac{1}{t}$ *per cui* $(x\to 0)\Leftrightarrow(t\to\infty)$, *sostituendo:*

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x} = \left(\frac{0}{0}=?\right).\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\log_e(1+x) = \lim_{x\to 0}\log_e(1+x)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \log_e e = 1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_b(1+x)}{x} = \left(\frac{0}{0}=?\right).\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_b(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\log_b(1+x) = \lim_{x\to 0}\log_b(1+x)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \log_b e = \frac{1}{\log_e b}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \left(\frac{0}{0}=?\right).$$ *Si pone* $a^x-1=t$ *da cui si ottiene* $a^x=1+t$;

ricavando poi $x=\log_a(1+t)=\dfrac{\log_e(1+t)}{\log_e a}$ *per cui* $(x\to 0)\Leftrightarrow(t\to 0)$, *sostituendo:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\log_e(1+t)}{\log_e a}} = \lim_{t\to 0}\log_e a\cdot\frac{t}{\log_e(1+t)} = \lim_{t\to 0}\log_e a\cdot\frac{1}{\frac{\log_e(1+t)}{t}} = \log_e a\cdot\frac{1}{1} = \log_e a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \left(\frac{0}{0}=?\right).$$ *Per il limite precedente* $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\log_e e = 1.$

Limiti delle funzioni razionali intere

Il calcolo del limite di una funzione razionale intera $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ è effettuato nel seguente modo:

A. Se $x\to c$ il limite è dato dal valore della funzione $f(x)$ per $x=c$, cioè: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$;

B. Se $x\to\pm\infty$ il calcolo del limite, nel caso in cui si presenta la forma indeterminata $+\infty-\infty$, è effettuato raccogliendo a fattor comune la variabile x^n (x di grado max).

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x^n\cdot\left(\frac{a_0}{x^n}+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{x}+a_n\right) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n\cdot x^n$$

(essendo $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a_0}{x^n} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a_1}{x^{n-1}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a_2}{x^{n-2}} = \ldots = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a_{n-1}}{x} = 0$).

Il valore del limite dipende esclusivamente dal termine di grado massimo:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n\right) = \lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n$$

Esempi

$$\lim_{x\to 0}\left(2+3x^2-4x^3\right) = 2+3\cdot 0^2-4\cdot 0^3 = 2.$$

$$\lim_{x\to 2}\left(2+3x^2-4x^3\right) = 2+3\cdot 2^2-4\cdot 2^3 = -18.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2+3x^2-4x^3\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3\cdot\left(\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x}-4\right) = [\to-\infty]\bullet[\to(0+0-4)] = +\infty.$$

Più velocemente si ha: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+3x^2-4x^3\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} -4x^3 = +\infty$.

Limiti delle funzioni razionali fratte

Il calcolo del limite di una funzione razionale fratta $f(x) = \dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_px^p}$ è effettuato nel seguente modo:

A. Se $x\to c$, il calcolo del limite $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_px^p}$ (con c valore finito e diverso da zero) è effettuato distinguendo i seguenti sottocasi:

1. Se $D(c)\neq 0$ allora $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{N(x)}{D(x)} = \dfrac{N(c)}{D(c)}$.
2. Se $D(c)=0$ e $N(c)\neq 0$ allora $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{N(x)}{D(x)} = \infty$.
3. Se $D(c)=0$ e $N(c)=0$ allora $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{N(x)}{D(x)}$ si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$.

Per eliminare l'indeterminazione occorre scomporre numeratore e denominatore raccogliendo il fattor comune $(x-c)$.

Esempi

$$\lim_{x\to -1}\frac{2-3x+7x^2}{5x^4-8x^3} = \frac{2-3\cdot(-1)+7\cdot(-1)^2}{5\cdot(-1)^4-8\cdot(-1)^3} = \frac{12}{13}.$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x+3}{5x^4-8x^3} = \frac{3\cdot(-1)+3}{5\cdot(-1)^4-8\cdot(-1)^3} = \frac{0}{13}. = 0$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{5x^4-8x^3}{3x+3} = \frac{5\cdot(-1)^4-8\cdot(-1)^3}{3\cdot(-1)+3} = \frac{13}{\to 0}. = \infty.$$

$\lim_{x\to 2}\frac{2x^3-x^2-7x+2}{2x^2-5x+2}$ *Il limite si presenta nella forma indeterminata* $\frac{0}{0}$. *Occorre scomporre numeratore e denominatore raccogliendo il fattor comune* $(x-2)$. *Per fare ciò si utilizza Ruffini.*

	2	−1	−7	2
2		4	6	−2
	2	3	−1	=

	2	−5	2
2		4	−2
	2	−1	=

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^3-x^2-7x+2}{2x^2-5x+2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(2x^2+3x-1)}{(x-2)\cdot(2x-1)} = \lim_{x\to 2}\frac{2x^2+3x-1}{2x-1} = \frac{2\cdot 2^2+3\cdot 2-1}{2\cdot 2-1} = \frac{13}{3}$$

B. se $x\to 0$, il calcolo del limite $\lim_{x\to 0}\frac{N(x)}{D(x)}$ può presentare la forma di indecisione $\frac{0}{0}$.

L'indeterminazione è eliminata dividendo numeratore e denominatore per la x di grado minimo.

Il limite dipende esclusivamente dai termini di grado minimo $a_s x^s$ *e* $b_t x^t$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a_s x^s + a_{s+1}x^{s+1}+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_n x^n}{b_t x^t + b_{t-1}x^{t-1}\ldots+b_{p-1}x^{p-1}+b_p x^p} = \lim_{x\to 0}\frac{a_s x^s}{b_t x^t} = \begin{cases} 0 & se\ s>t \\ \infty & se\ s<t \\ \frac{a_s}{b_t} & se\ s=t \end{cases}$$

s = esponente min della x a numeratore
t = esponente min della x a denominatore

Esempi

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-3x+7x^2}{5x^4-8x^3} = \frac{2-0+0}{0-0} = \infty.$$ *Il limite è immediato*

$$\lim_{x\to 0}\frac{3-2x+7x^2}{5x^4-8} = \frac{3-0+0}{0-8} = -\frac{3}{8}.$$ *Il limite è immediato*

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x-2x^2}{2x-5} = \frac{0-0}{0-5} = 0.$$ *Il limite è immediato*

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^5-x^4+17x^2}{2x^4+23x^3} = \left(\frac{0}{0}=?\right)$$ *Dividendo per* x^2 *(x di grado minimo) si ha:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^5-x^4+17x^2}{2x^4+23x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^3-x^3+17}{2x^2+23x} = \frac{\to(0-0+17)}{\to(0+0)} = \infty .$$

In modo più veloce $\lim_{x\to 0}\frac{3x^5-x^4+17x^2}{2x^4+23x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{17x^2}{23x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{17}{23x} = \frac{17}{\to 0} = \infty .$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^5-x^4+17x^3}{2x+23x^3} = \left(\frac{0}{0}=?\right)$$ *Dividendo per* x *(x di grado minimo) si ha:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^5-x^4+17x^3}{2x+23x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^4-x^3+17x^2}{2+23x^2} = \frac{0-0+0}{2+0} = 0 .$$

In modo più veloce $\lim_{x\to 0}\frac{2x^5-x^4+17x^3}{2x+23x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{17x^3}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{17x^2}{2} = \frac{0}{2} = 0 .$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^5-x^4+7x^3}{2x^4-8x^3} = \left(\frac{0}{0}=?\right)$$ *Dividendo per* x^3 *(x di grado minimo) si ha:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^5-x^4+7x^3}{2x^4-8x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2-x+7}{2x-8} = \frac{0-0+7}{0-8} = -\frac{7}{8} .$$

In modo più veloce $\lim_{x\to 0}\frac{2x^5-x^4+7x^3}{2x^4-8x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{7x^3}{-8x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{7}{-8} = -\frac{7}{8} .$

C. Se $x\to\infty$ il calcolo del limite $\lim_{x\to 0}\frac{N(x)}{D(x)}$ può presentare la forma di indecisione $\frac{\infty}{\infty}$.

L'indeterminazione viene eliminata raccogliendo a fattor comune la variabile x^n a numeratore e la variabile x^p a denominatore.

Il limite dipende esclusivamente dai termini di grado massimo $a_n x^n$ *e* $b_p x^p$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_px^p} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_px^p} = \begin{cases} 0 & se\ n<p \\ \infty & se\ n>p \\ \frac{a_n}{b_p} & se\ n=p \end{cases}$$

In particolare, se $x\to+\infty$ e $n>p$ si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_px^p} = \begin{cases} +\infty & se\ a_n\ e\ b_p\ sono\ concordi \\ -\infty & se\ a_n\ e\ b_p\ sono\ discordi \end{cases}$$

In particolare, se $x \to -\infty$ e $n > p$ si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_p x^p} = \begin{cases} +\infty & \begin{array}{c} se\ a_n\ e\ b_p\ sono\ concordi\ \ e\ \ n-p\ è\ pari \\ oppure \\ se\ a_n\ e\ b_p\ sono\ discordi\ \ e\ \ n-p\ è\ dispari \end{array} \\ -\infty & \begin{array}{c} se\ a_n\ e\ b_p\ sono\ concordi\ \ e\ \ n-p\ è\ dispari \\ oppure \\ se\ a_n\ e\ b_p\ sono\ discordi\ \ e\ \ n-p\ è\ pari \end{array} \end{cases}$$

Esempi

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-5x^3}{3} = +\infty.$ *Il limite è immediato*

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{5x^3-2} = 0^-.$ *Il limite è immediato*

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^5 - x^4 + 17x^2}{2x^4 + 23x^3} = \left(\dfrac{\infty}{\infty} = ?\right)$ *Dividendo per x^5 (x di grado massimo) si ha:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^5 - x^4 + 17x^2}{2x^4 + 23x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{17}{x^3}}{\frac{2}{x} + \frac{23}{x^2}} = \frac{\to (3-0+0)}{\to (0+0)} = \infty.$$

Senza fare i calcoli invece, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^5 - x^4 + 17x^2}{2x^4 + 23x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^5}{2x^4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{2} = \infty.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^6 - x^4 + 17x^2}{2x^3 - 5x^4} = \left(\dfrac{\infty}{\infty} = ?\right)$

Raccogliendo x^6 (x di grado massimo) al numeratore) e x^4 (x di grado massimo) al denominatore, si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^6 - x^4 + 17x^2}{2x^3 - 5x^4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^6 \cdot \left(3 - \frac{1}{x} + \frac{17}{x^2}\right)}{x^4 \cdot \left(\frac{2}{x} - 5\right)} = \lim_{x\to-\infty} x^2 \cdot \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{17}{x^2}}{\frac{2}{x} - 5} = (\to +\infty) \cdot \frac{\to (3-0+0)}{\to (0-5)} =$$

$$= (\to +\infty) \cdot \left(\to -\frac{3}{5}\right) = -\infty.$$

Senza fare i calcoli invece, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^6 - x^4 + 17x^2}{2x^3 - 5x^4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^6}{-5x^4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^6}{-5} = -\infty.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5 - 2x^2 - x^4}{2x + 23x^7} = \left(\dfrac{\infty}{\infty} = ?\right)$ *Dividendo per x^7 (x di grado massimo) si ha:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5 - 2x^2 - x^4}{2x + 23x^7} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{x^7} - \frac{2}{x^5} - \frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^6} + 23} = \frac{\to (0-0-0)}{\to (0+23)} = 0.$$

Senza fare i calcoli invece, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5 - 2x^2 - x^4}{2x + 23x^7} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^4}{23x^7} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-1}{23x^3} = 0.$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^5 - x^4 + 7x^3}{2x^4 - 3x^5} = \left(\frac{\infty}{\infty} = ? \right)$$ *Dividendo per* x^5 *(x di grado minimo) si ha:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^5 - x^4 + 7x^3}{2x^4 - 3x^5} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{7}{x^2}}{\frac{2}{x} - 3} = \frac{\to (2 - 0 + 0)}{\to (0 - 3)} = -\frac{2}{3}.$$

Senza fare i calcoli invece, $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^5 - x^4 + 7x^3}{2x^4 - 3x^5} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^5}{-3x^5} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}.$

Limiti delle funzioni irrazionali intere

Il calcolo del limite di una funzione irrazionale intera $f(x)=\sqrt[n]{f(x)}$ è effettuato nel seguente modo:

A. Se $x \to c$, dove c è un punto al finito del Dominio della funzione, il calcolo del limite è dato dal valore della funzione $f(x)$ per $x=c$, cioè: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$.

B. Se $x \to \pm\infty$, il calcolo del limite, nel caso in cui si presenta la forma indeterminata $+\infty-\infty$, è effettuato razionalizzando il termine che crea l'indeterminazione.

Esempi

$$\lim_{x\to 4}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt[3]{x+4}\right) = \sqrt{4+5}-\sqrt[3]{4+4} = \sqrt{9}-\sqrt[3]{8} = 3-2 = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}\right) = \left(+\infty-\infty=?\right)$$ *razionalizzando il numeratore si ha:*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5}\right)}{\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}\right)\cdot\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5}\right)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+5}\right)^2-\left(\sqrt{x-5}\right)^2}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+5-(x-5)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+5-(x-5)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5}} = \frac{10}{\to+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2-x-1}\right) = \left(+\infty-\infty=?\right)$$ *razionalizzando il numeratore si ha:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2-x-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2-x-1}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2-x-1}\right)}{\left(\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2-x-1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1-\left(2x^2-x-1\right)}{\left(\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2-x-1}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\left(\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2-x-1}\right)} = \left(\frac{\infty}{\infty}=?\right)$$ *dalla padella nella brace?*

No, basta raccogliere a fattor comune la variabile x, ricordando che $\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}+x & se\ x\ge 0\\ -x & se\ x<0\end{cases}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\left(\sqrt{x^2\cdot\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\cdot\left(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|\cdot\left(\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)} =$$

$$= \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{+x\cdot\left(\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\left(\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\\[2ex] \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{-x\cdot\left(\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-\left(\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right) = (+\infty-\infty=?)$$ *razionalizzando il numeratore si ha:*

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x}-x}{\sqrt{x^2+2x}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+2x}-x} =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\cdot\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)} = \frac{2}{\to-(1+1)} = \frac{2}{-2} = -1\,.$$

Limiti delle funzioni irrazionali fratte

Il calcolo del limite di una funzione irrazionale fratta $f(x) = \sqrt[n]{\frac{N(x)}{D(x)}}$ è effettuato nel seguente modo:

A. Se $x\to c$ il calcolo del limite, nel caso in cui si presenta la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, è effettuato razionalizzando il termine che crea l'indeterminazione.

Esempi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \left(\frac{0}{0}=?\right)$$ *Razionalizzando si ha:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{\to 0}{\to 2} = 0\,.$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \left(\frac{0}{0}=?\right)$$ *Razionalizzando si ha:*

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}\cdot\frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+2} = \lim_{x\to 5}\frac{x-1-4}{(x-5)\cdot\sqrt{x-1}+2} = \lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)\cdot\sqrt{x-1}+2} =$$

$$= \lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{\sqrt{5-1}+2} = \frac{1}{4}\,.$$

B. Se $x \to \infty$ il calcolo del limite, nel caso in cui si presenta la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, è effettuato raccogliendo a fattor comune x^n a numeratore e x^p a denominatore.

Il limite dipende esclusivamente dai termini di grado massimo $a_n x^n$ *e* $b_p x^p$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[k]{\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_p x^p}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[k]{\frac{a_n x^n}{b_p x^p}} = \begin{cases} 0 & se\ n < p \\ \infty & se\ n > p \\ \sqrt[k]{\frac{a_n}{b_p}} & se\ n = p \end{cases}$$

Esempi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} = ?\right)$$

Questo limite tende a zero, perché il grado del numeratore è minore del grado del denominatore ($\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ *).*

Raccogliendo a fattor comune $x = \sqrt{x^2}$ *(uguaglianza valida per* $x \to +\infty$*)*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x}} - 1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x| \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}\right) = 0 .$$

Oppure

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{x}{x^2}} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}\right) = 0 - 0 = 0 .$$

Oppure

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x \cdot \left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x \cdot \left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{x}+1} =$$

$$= \frac{\to 1}{\to +\infty} = 0 .$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{2x} = \left(\frac{\infty}{\infty} = ?\right)$$

Questo limite tende a $\frac{1}{2}$ *(coefficienti dei termini di grado max), perché il grado del numeratore è uguale al grado del denominatore (* $\sqrt{x^2} = |x|$ *).*

Raccogliendo a fattor comune $x = \sqrt{x^2}$ *(uguaglianza valida per* $x \to +\infty$*)*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{2} = \frac{1}{2} .$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{\sqrt[3]{x^5 + x^4 + 1}} = \left(\frac{\infty}{\infty} = ?\right)$$

Questo limite tende a $+\infty$, *perché il grado del numeratore è maggiore di quello del denominatore* ($\sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}$)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{\sqrt[3]{x^5 + x^4 + 1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{\sqrt[3]{x^6 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^6}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^6}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^6}}} = +\infty .$$

Il calcolo dei limiti delle funzioni goniometriche viene effettuato utilizzando il limite fondamentale:

$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$ e i limiti derivati dal limite fondamentale:

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\, x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\, x}{x} = 0$ $\lim_{x \to 0} \frac{tg\, x}{x} = 1$.

$\lim_{x \to \infty} \frac{sen\, x}{x} = 0$ $\lim_{x \to \infty} \frac{cos\, x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} sen\, x =$ non esiste $\lim_{x \to +\infty} cos\, x =$ non esiste

Esempi

$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, px}{nx} = \frac{p}{n}$. Il limite è della forma $\left(\frac{0}{0} = ? \right)$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, px}{nx} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\, px}{nx} \cdot \frac{p}{p} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\, px}{px} \cdot \frac{p}{n} = 1 \cdot \frac{p}{n} = \frac{p}{n}.$$

$\lim_{x \to 0} \frac{ax + sen\, px}{nx} = \frac{a+p}{n}$ Il limite è della forma $\left(\frac{0}{0} = ? \right)$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax + sen\, px}{nx} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{ax}{nx} + \frac{sen\, px}{nx} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{a}{n} + \frac{sen\, px}{px} \cdot \frac{p}{n} \right) = \frac{a}{n} + 1 \cdot \frac{p}{n} = \frac{a+p}{n}.$$

$\lim_{x \to 0} \frac{tg\, px}{nx} = \frac{p}{n}$. Il limite è della forma $\left(\frac{0}{0} = ? \right)$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg\, px}{nx} = \lim_{x \to 0} \frac{tg\, px}{nx} \cdot \frac{p}{p} = \lim_{x \to 0} \frac{tg\, px}{px} \cdot \frac{p}{n} = 1 \cdot \frac{p}{n} = \frac{p}{n}.$$

Il calcolo dei limiti delle funzioni esponenziali e logaritmiche viene effettuato utilizzando il limite fondamentale:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$ e i limiti derivati dal limite fondamentale:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_b(1+x)}{x}=\frac{1}{\log_e b}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log_e a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{a^x}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}x^\alpha\cdot\log x=0 \quad (\alpha>0) \qquad \lim_{x\to+\infty}[f(x)]^{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}e^{[g(x)\cdot\log f(x)]}$$

Esempi

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{p}{x}}=\sqrt[n]{e^p}.$$ *Il limite è della forma* $(1^\infty=?)$.

Si pone $\frac{x}{n}=\frac{1}{t}$ *e si ottiene* $x=\frac{n}{t}$ *e* $\frac{p}{x}=\frac{p}{\frac{n}{t}}=t\cdot\frac{p}{n}$ *Inoltre* $(x\to 0)\Leftrightarrow(t\to\infty)$; *sostituendo:*

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{p}\right)^{\frac{n}{x}} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\cdot\frac{p}{n}} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{\frac{p}{n}} = e^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{e^p}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+nx)}{px}=\frac{n}{p}.$$ *Il limite è della forma* $\left(\frac{0}{0}=?\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+nx)}{px} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{px}\cdot\log_e(1+nx) = \lim_{x\to 0}\log_e(1+nx)^{\frac{1}{px}}.$$

Si pone $nx=\frac{1}{t}$ *e si ottiene* $x=\frac{1}{nt}$ *e* $\frac{1}{px}=\frac{1}{p\cdot\frac{1}{nt}}=\frac{1}{\frac{p}{nt}}=\frac{nt}{p}=t\cdot\frac{n}{p}$ *Inoltre* $(x\to 0)\Leftrightarrow(t\to\infty)$; *sostituendo:*

$$\lim_{x\to 0}\log_e(1+nx)^{\frac{1}{px}} = \lim_{x\to 0}\log_e\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\cdot\frac{n}{p}} = \lim_{x\to 0}\log_e\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{\frac{n}{p}} = \log_e e^{\frac{n}{p}} = \frac{n}{p}.$$

Oppure

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+nx)}{px} = \lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+nx)}{px}\cdot\frac{n}{n} = \lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+nx)}{nx}\cdot\frac{n}{p} = 1\cdot\frac{n}{p} = \frac{n}{p}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{nx}-1}{p}=\frac{n}{p}.$$ *Il limite è della forma* $\left(\frac{0}{0}=?\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{nx}-1}{p} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{nx}-1}{p}\cdot\frac{n}{n} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{nx}-1}{n}\cdot\frac{n}{p} = 1\cdot\frac{n}{p} = \frac{n}{p}.$$

$$\lim_{x\to e}\frac{\log_e x-1}{x-e}=\frac{1}{e}.\qquad \text{Il limite è della forma } \left(\frac{0}{0}=?\right).$$

Si pone $x-e=t$ *e si ottiene* $x=e+t$; $(x\to e)\Leftrightarrow(t\to o)$; *e sostituendo* $1=\log_e e$ *: si ha:*

$$\lim_{x\to e}\frac{\log_e(x-1)}{x-e} = \lim_{t\to o}\frac{\log_e(e+t)-1)}{t} = \lim_{t\to o}\frac{\log_e(e+t)-\log_e e)}{t} = \lim_{t\to o}\frac{\log_e\frac{e+t}{e}}{t} = \lim_{t\to o}\frac{\log_e\left(1+\frac{t}{e}\right)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to o}\frac{\log_e\left(1+\frac{t}{e}\right)}{t}\cdot\frac{e}{e} = \lim_{t\to o}\frac{\log_e\left(1+\frac{t}{e}\right)}{\frac{t}{e}}\cdot\frac{1}{e} = 1\cdot\frac{1}{e} = \frac{1}{e}.$$

$$\lim_{x\to\infty} 2^{\frac{x+1}{2x-1}}=\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} 2^{\frac{x+1}{2x-1}} = 2^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x-1}} = 2^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2-\frac{1}{x}}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log_e^2 x+1}{\log_e x+2\log_e^2 x}=\left(\frac{\infty}{\infty}=?\right)\qquad \text{Si pone } t=\log_e x \ \Rightarrow\ \text{Inoltre } \left(x\to 0^+\right)\Leftrightarrow(t\to-\infty)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log_e^2 x+1}{\log_e x+2\log_e^2 x} = \lim_{t\to-\infty}\frac{t^2+1}{t+2t^2} = \lim_{t\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}+2} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\log_e x+3}} = \left(0^0=?\right)\qquad \text{Ricordando che } [f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\log_e f(x)} \text{ il limite si riscrive:}$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{\log_e x+3}\cdot\log_e\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{\log_e x+3}\cdot(-\log_e x)} = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{\log_e x}{\log_e x+3}} \qquad \text{dividendo per } \log_e x \text{ si ha:}$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{1+\frac{3}{\log_e x}}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

ponendo $x=\frac{1}{t}$ $\quad t=\frac{1}{x}$ $\quad$ *se* $x\to 0\ \Rightarrow\ t\to\infty$

$$= \ln\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \ln e = 1 \qquad\Rightarrow\qquad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{0}{0}$$ *Si pone* $e^x-1=t$ *si ha:* $e^x=1+t$ $\quad x=\ln(1+t)$ $\quad$ *se* $x\to 0\ \Rightarrow\ t\to 0$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}} = \frac{1}{1} = 1 \qquad\Rightarrow\qquad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1}$$

Una funzione $f(x)$ si dice un **infinitesimo** per $x \to c$, se è $\lim_{x \to c} f(x) = 0$

(c può essere uguale anche a ∞)

Gli infinitesimi vengono, solitamente, indicati con le lettere α, β, χ, ecc.

$$\text{Se } \lim \frac{\alpha}{\beta} = \begin{cases} l \neq 0 & \alpha \text{ e } \beta \text{ sono dello stesso ordine} \\ 0 & \alpha \text{ è un infinitesimo di ordine superiore a } \beta \\ \infty & \alpha \text{ è un infinitesimo di ordine inferiore a } \beta \\ \text{non } \exists & \alpha \text{ e } \beta \text{ non sono confrontabili} \end{cases}$$

Principio di sostituzione degli infinitesimi

Se il rapporto di due infinitesimi ammette un limite, questo limite resta invariato se si sostituisce ciascuno di essi con un infinitesimo equivalente.

Infinitesimi equivalenti	
$a^{\alpha} - 1$	α
$(1 + \alpha)^{k}$	$k\,\alpha$
$\sqrt[n]{1+\alpha} - 1$	$\frac{\alpha}{n}$
$\ln(1+\alpha)$	α
$\ln ae^{\alpha} - 1$	α

Infinitesimi equivalenti	
$sen\ \alpha$	α
$tg\ \alpha$	α
$1 - \cos\alpha$	$\frac{\alpha^2}{2}$
$arcsen\ \alpha$	α
$arctg\ \alpha$	α

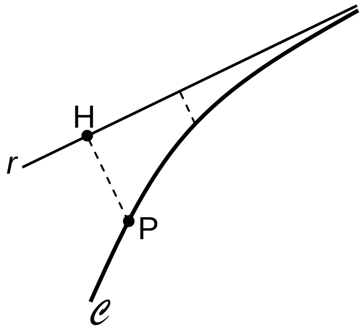
Esempio

$$\lim_{x \to 0} \frac{2arctg\ x + 3sen\ x - 4log(1+x)}{7x}$$

Il limite è della forma $\left(\frac{0}{0} = ?\right)$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{2arctg\ x + 3sen\ x - 4log(1+x)}{7x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x + 3x - 4x}{7x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{7x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{7} = \frac{1}{7}.$$

Una retta ***r*** è detta **asintoto** della curva $\mathcal{C}$ se la distanza PH tra il generico punto P$\in\mathcal{C}$ e la retta ***r*** tende a zero allorchè il punto P si allontana indefinitivamente sulla curva $\mathcal{C}$, tendendo a un suo punto all'infinito.



Asintoti verticali

$$\left(Se \lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty \right) \Rightarrow \left(la\ retta\ x = c\ \text{è}\ Asintoto\ Verticale \right)$$

$$\begin{pmatrix} Se\ x \to c^{+} & \Rightarrow & la\ retta\ x = c\ \text{è}\ Asintoto\ Verticale\ a\ destra \\ Se\ x \to c^{-} & \Rightarrow & la\ retta\ x = c\ \text{è}\ Asintoto\ Verticale\ a\ sinistra \end{pmatrix}$$

Asintoti orizzontali

$$\left(\text{Se} \lim_{x\to\infty} f(x) = k \quad (k \neq \infty) \right) \Rightarrow \left(\textbf{la retta } y = k \textbf{ è Asintoto Orizzontale} \right)$$

$$\begin{pmatrix} Se\ x \to +\infty & \Rightarrow & la\ retta\ y = k\ \text{è}\ Asintoto\ Orizzontale\ a\ destra \\ Se\ x \to -\infty & \Rightarrow & la\ retta\ y = k\ \text{è}\ Asintoto\ Orizzontale\ a\ sinistra \end{pmatrix}$$

Asintoti obliqui

$$\begin{pmatrix} Se \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \\ \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \\ \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = q \neq \infty \end{pmatrix} \Rightarrow \left(la\ retta\ y = mx + q\ \text{è}\ Asintoto\ Obliquo \right)$$

$$\begin{pmatrix} Se\ x \to +\infty & \Rightarrow & la\ retta\ y = mx + q\ \text{è}\ Asintoto\ Obliquo\ a\ destra \\ Se\ x \to -\infty & \Rightarrow & la\ retta\ y = mx + q\ \text{è}\ Asintoto\ Obliquo\ a\ sinistra \end{pmatrix}$$

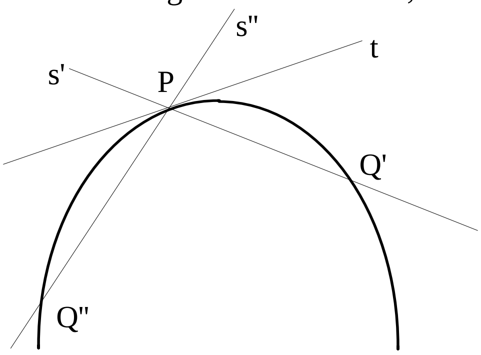
Osservazioni

Le funzioni algebriche razionali intere non hanno asintoti di alcun genere.
Le funzioni algebriche razionali fratte hanno:
- tanti asintoti verticali quanti sono gli zeri del denominatore;
- un asintoto orizzontale quando il grado del numeratore è minore o uguale a quello del denominatore
- un asintoto obliquo quando il grado del numeratore supera di 1 quello del denominatore.

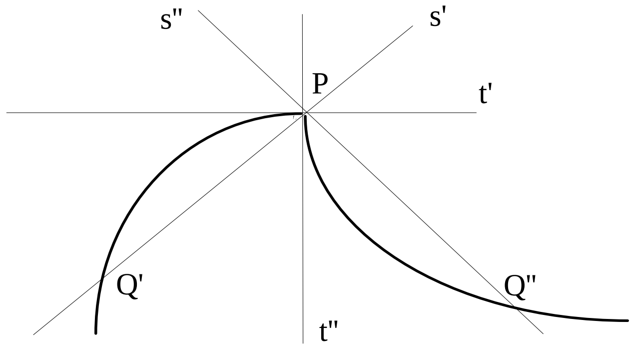
Le funzioni irrazionali il cui insieme di definizione si estende all'infinito possono avere due asintoti obliqui e/o orizzontali (uno a destra e uno a sinistra).

Tangente ad una curva

Prima di dare la definizione di derivata di una funzione, diamo la definizione di retta tangente.
Si chiama **tangente** ad una curva piana in un suo punto P, la posizione limite, se esiste, della retta (secante) che unisce P con un altro punto Q qualsiasi della curva, allorchè si fa avvicinare Q indefinitivamente a P.
Ricordiamo però che la posizione limite della retta secante PQ deve esistere (ed essere sempre la stessa) comunque Q si avvicini a P (cioè sia che Q si avvicini a da destra, sia che Q si avvicini a P da sinistra).
Pertanto la tangente ad una curva, come si può notare dal grafico sottostante, può anche non esistere.

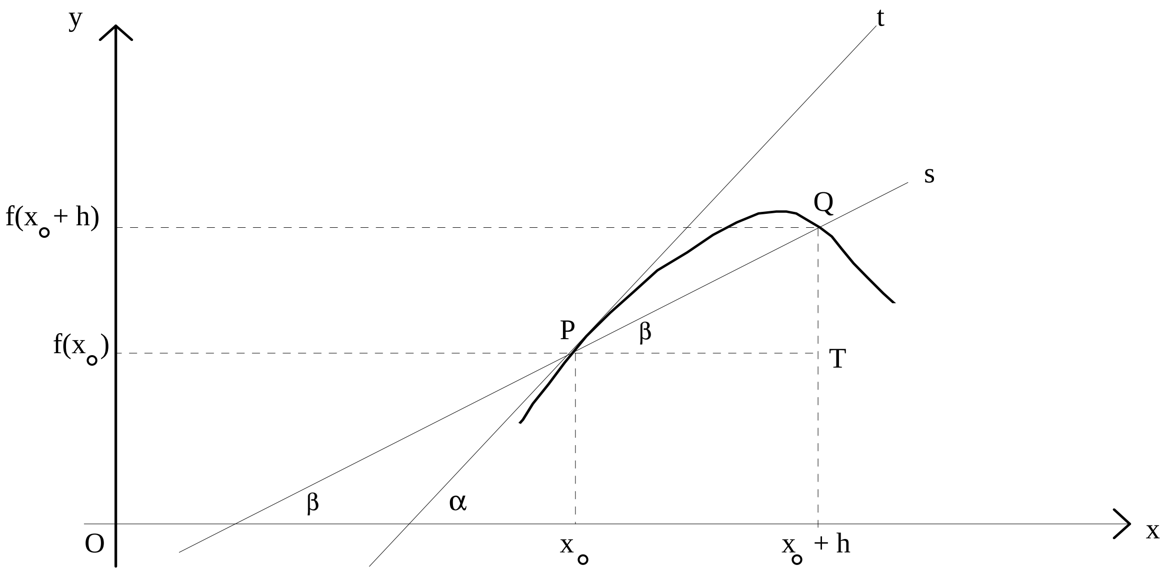


Comunque si prende un punto Q' nel ramo destro della curva e un punto Q'' nel ramo sinistro, e li facciamo tendere al punto P, si ottiene che entrambe le rette secanti s' e s'' tendono alla retta t che risulta essere la la tangente alla curva nel punto P .



In questo caso invece, non esiste la retta tangente alla curva nel punto P. Poichè facendo tendere Q' al punto P si ottiene la retta t', mentre facendo tendere Q'' al punto P si ottiene la retta t'' .

Definizione di derivata e suo significato geometrico



Data una funzione y = f (x) definita in certo dominio (a, b) , per trovare la retta tangente alla curva in un suo punto $P\left(x_0; f(x_0)\right)$, consideriamo un altro punto Q ($x_0 + h$, $f(x_0 + h)$) della curva e facciamolo avvicinare indefinitivamente al punto P.

Si osserva che man mano che Q si avvicina P la retta per PQ varia la sua inclinazione, fino ad assumere la posizione limite della retta tangente t.

L 'equazione di tale retta tangente t si trova con la nota formula della geometria analitica :
$y - y_P = m \cdot (x - x_P)$ dove m è il coefficiente angolare della retta t , cioè $m = \operatorname{tg} \alpha$.
Osservando la figura, l'angolo α rappresenta l'inclinazione limite della retta secante, al tendere del punto Q al punto P, cioè $\lim\limits_{Q \to P} \beta = \alpha \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{Q \to P} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{h \to 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$

Dalla trigonometria sappiamo poi, che in un triangolo rettangolo : la tangente di un angolo è uguale al rapporto fra il cateto opposto all'angolo e il cateto adiacente, pertanto nel triangolo rettangolo PQT :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{QT}}{\overline{PT}} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \Rightarrow \quad m = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{h \to 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Pertanto il coefficiente angolare m della retta tangente t alla curva y = f (x) nel punto x_0 è dato dal limite

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

h è detto incremento della variabile indipendente x (Δx) ;
$f(x_0 + h) - f(x_0)$ è detto incremento della variabile dipendente y (Δy) ;
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ è detto rapporto incrementale di f (x) relativo al punto x_0 e all'incremento h

Derivata di una funzione

La derivata di una funzione y = f (x) , nel punto x 0 interno al suo dominio, è il limite, se esiste ed è finito, del rapporto incrementale per $h \to 0$, e si scrive :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Se il limite in questione non esiste finito si dice che la funzione non è derivabile in x_0 .

Se esiste finito solo il limite destro (o il limite sinistro) si dice che la funzione è derivabile solo a destra (o derivabile solo a sinistra).

Se la funzione f (x) è derivabile in ciascun punto x di un intervallo (a, b) , si dice che essa è derivabile nell'intervallo (a, b) .

I simboli utilizzati per indicare la derivata di una funzione sono : $f'(x),\ y'(x),\ D\, f(x),\ \dfrac{dy}{dx}$.

Concludendo, la derivata di una funzione y = f (x) calcolata in un punto x 0 , rappresenta il coefficiente angolare m della retta tangente t alla curva in questione nel suo punto P (x 0 , f (x 0)) ,
cioè : f ' (x 0) = m t .

Derivata della somma

$D\left[f(x) + g(x) \right] = f^{I}(x) + g^{I}(x)$

Derivata del prodotto

$D\left[f(x) \cdot g(x) \right] = f^{I}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g^{I}(x)$

Derivata del prodotto di una costante per una funzione

$D\left[k \cdot f(x) \right] = k \cdot f^{I}(x)$

Derivata del quoziente

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f^{I}(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g^{I}(x)}{\left[g(x) \right]^2}$$

Derivata della funzione composta

$D\, g\left[f(x) \right] = g^{I}\left[f(x) \right] \cdot f^{I}(x)$

Esempio: $D \log_e sen\, x = \dfrac{1}{sen\, x} \cdot \cos x = cotg\, x$.

Derivata della funzione inversa

$D\ f(x) = \dfrac{1}{g^{I}(y)}$ dove $g(y) = f^{-1}(y)$

Esempio

Sia $y = arcsen\ x$. La funzione inversa è $x = sen\ y$ definita in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow$

$$D\ arcsen\ x = \frac{1}{D\ sen\ y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Derivata della somma $D\left[\, f(x) + g(x)\,\right] = f^{I}(x) + g^{I}(x)$

$$D[f(x)+g(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f^{I}(x) + g^{I}(x)$$

Derivata del prodotto $D\left[\, f(x)\cdot g(x)\,\right] = f^{I}(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g^{I}(x)$

$$D[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)\cdot g(x+h)]-[f(x)\cdot g(x)]}{h} =$$ *aggiungendo e sottraendo* $f(x+h)\cdot g(x)$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)+f(x+h)\cdot g(x)-f(x+h)\cdot g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot[g(x+h)-g(x)]+g(x)\cdot[f(x+h)-f(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f(x)\cdot g^{I}(x)+f^{I}(x)\cdot g(x)$$

Derivata del prodotto di una costante per una funzione $D\left[\, k\cdot f(x)\,\right] = k\cdot f^{I}(x)$

$$D[k\cdot f(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{k\cdot f(x+h)-k\cdot f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k\cdot f(x+h)-k\cdot f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} k\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = k\cdot f^{I}(x)$$

Derivata del quoziente $D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f^{I}(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g^{I}(x)}{[g(x)]^2}$

$$D\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x+h)\cdot g(x)-g(x+h)\cdot f(x)}{g(x+h)\cdot g(x)}}{h} =$$ *aggiungendo e sottraendo* $f(x)\cdot g(x)$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{h}\frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)-g(x+h)\cdot f(x)+f(x)\cdot g(x)}{g(x+h)\cdot g(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)}\left[g(x)\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] =$$

$$= \frac{1}{g(x)\cdot g(x)}\left[g(x)\cdot f^{I}(x)-f(x)\cdot g^{I}(x)\right] = \frac{g(x)\cdot f^{I}(x)-f(x)\cdot g^{I}(x)}{[g(x)]^2}.$$

TABELLA DELLE PRINCIPALI REGOLE DI DERIVAZIONE

$D\, f(x)$	$D\, g\left[f(x)\right] = g^{I}\left[f(x)\right] \cdot f^{I}(x)$
D costante = 0	
$D\, x^{n} = n\, x^{n-1}$	$D\,[f(x)]^{n} = n\,[f(x)]^{n-1} \bullet f^{I}(x)$
$D\, \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$	$D\, \frac{1}{f(x)} = -\frac{f^{I}(x)}{[f(x)]^2}$
$D\, \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$D\, \sqrt[n]{f(x)} = \frac{f^{I}(x)}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$
$D\, \sqrt[n]{x^{p}} = \frac{p}{n\sqrt[n]{x^{n-p}}}$	$D\, \sqrt[n]{[f(x)]^{p}} = \frac{p \cdot f^{I}(x)}{n\sqrt[n]{[f(x)]^{n-p}}}$
$D\, \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D\, \sqrt{f(x)} = \frac{f^{I}(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$D\, \text{sen}\, x = \cos x$	$D\, \text{sen}\, f(x) = f^{I}(x) \bullet \cos f(x)$
$D\, \cos x = -\text{sen}\, x$	$D\, \cos f(x) = -f^{I}(x) \bullet \text{sen}\, f(x)$
$D\, \text{tg}\, x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x$	$D\, \text{tg}\, f(x) = \frac{f^{I}(x)}{\cos^2 f(x)}$
$D\, \text{cotg}\, x = -\frac{1}{\text{sen}^2 x} = -(1 + \text{cotg}^2 x)$	$D\, \text{cotg}\, f(x) = -\frac{f^{I}(x)}{\text{sen}^2 f(x)}$
$D\, \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \cdot \log_e a}$	$D\, \log_a x = \frac{f^{I}(x)}{f(x) \cdot \log_e a}$
$D\, \log_e x = \frac{1}{x}$	$D\, \log_e f(x) = \frac{f^{I}(x)}{f(x)}$
$D\, a^{x} = a^{x} \cdot \log_e a$	$D\, a^{f(x)} = a^{f(x)} \bullet \log_e a \bullet f^{I}(x)$
$D\, e^{x} = e^{x}$	$D\, e^{f(x)} = f^{I}(x) \bullet e^{f(x)}$
$D\, \text{arcsen}\, x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D\, \text{arcsen}\, f(x) = \frac{f^{I}(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$D\, \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D\, \arccos f(x) = -\frac{f^{I}(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$D\, \text{arctg}\, x = \frac{1}{1+x^2}$	$D\, \text{arctg}\, f(x) = \frac{f^{I}(x)}{1+[f(x)]^2}$
$D\, \text{arccotg}\, x = -\frac{1}{1+x^2}$	$D\, \text{arccotg}\, x = -\frac{f^{I}(x)}{1+[f(x)]^2}$
$D\, x^{x} = x^{x} \bullet (1 + \log_e x)$	$D\left[f(x)\right]^{g(x)} = \left[f(x)\right]^{g(x)} \cdot \left[g^{I}(x) \cdot \log_e f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} \cdot f^{I}(x)\right]$

La derivata della funzione y = k è zero ∀∈ R

Infatti $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \mathbf{0}$

Questo risultato può essere ottenuto anche graficamente, infatti la funzione y = k rappresenta una retta orizzontale e pertanto la retta tangente ad essa è la retta stessa, la quale essendo orizzontale ha coefficiente angolare zero.

D x = 1 ∀∈ R

Infatti $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \mathbf{1}$

Questo risultato può essere ottenuto anche graficamente, infatti la funzione y = x è la bisettrice del I° e III° quadrante e pertanto la retta tangente ad essa è la retta stessa, la quale ha coefficiente angolare uno.

D x ^{2} = 2x ∀∈ R

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+h^2+2hx-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot(h+2x)}{h} = \mathbf{2x}$$

D x ^{3} = 3 x ^{2} ∀∈ R

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3+h^3+3hx^2+3h^2x-x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^3+3hx^2+3h^2x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot(h^2+3x^2+3hx)}{h} = \lim_{h\to 0} (h^2+3x^2+3hx) = \mathbf{3\,x^2}$$

D x ^{n} = n x $^{n-1}$ ∀∈ R

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n-x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^n+nx^{n-1}\cdot h+a_2x^{n-2}\cdot h^2+\ldots+a_{n-1}x\cdot h^{n-1}+h^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot(nx^{n-1}+a_2x^{n-2}\cdot h+\ldots+a_{n-1}x\cdot h^{n-2}+h^{n-1})}{h} = \mathbf{n\,x^{n-1}}$$

$$D\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \forall\, x \geq 0$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$D\ \ln x=\frac{1}{x} \qquad \forall\, x > 0$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\ln\frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0}\ln\left[\frac{x+h}{x}\right]^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0}\ln\left[1+\frac{h}{x}\right]^{\frac{1}{h}} \qquad \textit{ponendo}\quad \frac{h}{x}=\frac{1}{t} \quad\Longrightarrow\quad h=\frac{x}{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\ln\left[1+\frac{1}{t}\right]^{\frac{t}{x}} = \lim_{t\to\infty}\ln\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty}\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\ .$$

$$D\ \log_a x=\frac{1}{x\cdot\ln a} \qquad \forall\, x > 0$$

Essendo $\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a} \quad\Rightarrow\quad D\ln x = D\dfrac{1}{\ln a}\cdot\ln x = \dfrac{1}{\ln a}\cdot D\ln x = \dfrac{1}{\ln a}\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x\cdot\ln a}$

$$D\ e^x=e^x \qquad \forall\in R$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x\cdot\frac{e^h-1}{h}=e^x\cdot 1 = e^x$$

$$D\ \sin x=\cos x \qquad \forall\in R$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cdot\cosh+\cos x\cdot\sinh-\sin x}{h}=$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cdot(-1+\cosh)+\cos x\cdot\sin h}{h}= \lim_{h\to 0}\left[\sin x\frac{-1+\cosh}{h}+\frac{\sin h}{h}\cdot\cos x\right]=$$

Essendo $\displaystyle\lim_{h\to 0}-\frac{1-\cosh}{h}=\lim_{h\to 0}-\frac{1-\cosh}{h}\cdot\frac{1+\cosh}{1+\cosh}=\lim_{h\to 0}-\frac{1-\cos^2 h}{h\cdot(1+\cosh)}=\lim_{h\to 0}-\frac{\sin^2 h}{h\cdot(1+\cosh)}=$

$\displaystyle= \lim_{h\to 0}-\frac{\sinh}{h}\cdot\frac{\sinh}{1+\cosh}=-1\cdot 0=0$ *si ha:*

$$= \lim_{h\to 0}\left[\sin x\frac{-1+\cosh}{h}+\frac{\sin h}{h}\cdot\cos x\right]=\sin x\cdot 0+1\cdot\cos x=\cos x\ .$$

$D\ \cos x = -\sin x \qquad \forall \in R$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos(x)}{h} =$$

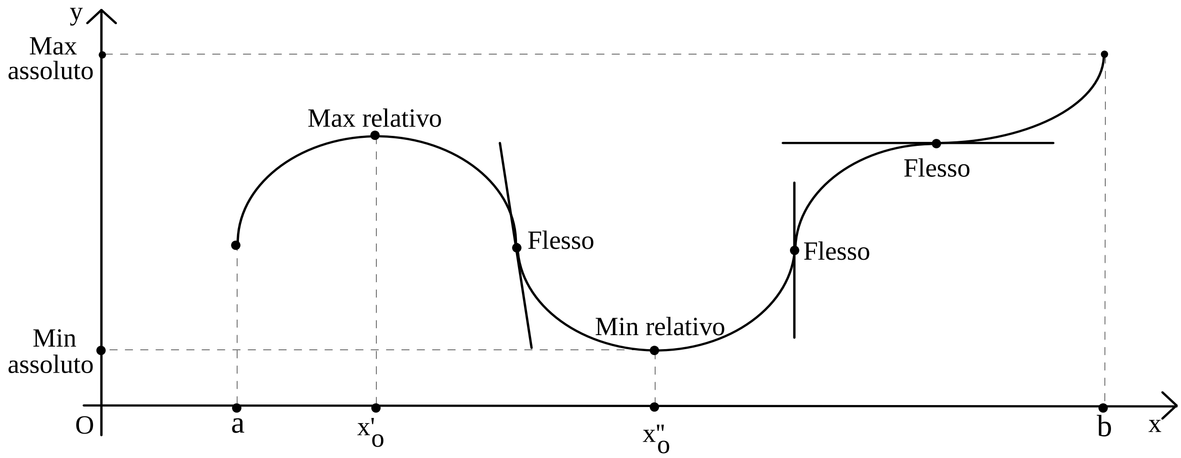
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cdot (\cos h - 1) - \sin x \cdot \sin h}{h} \ = \ \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \frac{\sin h}{h} \ = \ 1 \cdot 0 - \sin x \cdot 1 \ = \ \sin x$$

$D\ tg\, x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \qquad \forall x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$$D\, tgx \ = \ D\ \frac{sen\, x}{\cos x} \ = \ \frac{\cos x \cdot \cos x - (-senx) \cdot senx}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + tg^2 x$$

Sia y = f (x) una funzione reale definita nell'intervallo [a, b] ed x_0 un punto di tale intervallo ;
se per ogni x appartenete ad [a, b] risulta :
$f(x) < f(x_0)$: si dice che x_0 è un punto di **massimo assoluto** per la funzione ;
$f(x) > f(x_0)$: si dice che x_0 è un punto di **minimo assoluto** per la funzione ;
se esiste un intorno H del punto x_0 , per ogni x del quale, diverso da x_0 , risulta :
$f(x) < f(x_0)$: si dice che x_0 è un punto di **massimo relativo** per la funzione ;
$f(x) > f(x_0)$: si dice che x_0 è un punto di **minimo relativo** per la funzione ;
Un punto $P(x_0, f(x_0))$ è un punto di flesso per la funzione y = f (x) se la curva passa da una parte all'altra della tangente in esso.



Regola per la determinazione dei max e dei min relativi

Si calcola la derivata prima della funzione y = f (x) e si trovano le soluzioni dell'equazione $f^{I}(x) = 0$; e sia x_0 una di queste soluzioni.

Si calcola la derivata seconda $f^{II}(x)$. Se risulta $f^{II}(x_0) = \begin{cases} < 0 & x_0 \ \text{max} \\ > 0 & x_0 \ \text{min} \\ = 0 & x_0 \ \ ? \end{cases}$

Se $f^{II}(x_0) = 0$ si calcola $f^{III}(x)$. Se risulta $f^{III}(x) \neq 0$ allora x_0 non è ne max ne min.
Se risulta $f^{III}(x) = 0$, si calcolano le derivate successive fino a trovare quella che non si annulla in x_0.
Se quest'ultima è di ordine pari, si ha in x_0 un massimo se tale derivata è negativa, oppure un minimo , se essa è negativa; se invece è di ordine dispari, x_0 non è nè punto di max nè punto di min relativo per la funzione .

Determinazione dei max e dei min relativi (II ° metodo)

Si calcola la derivata prima della funzione y = f (x) e si studia il segno della derivata prima $f^{I}(x) > 0$;
negli intervalli dove la derivata prima è positiva la funzione è crescente;
negli intervalli dove la derivata prima è negativa la funzione è decrescente;

Regola pratica per la determinazione dei flessi

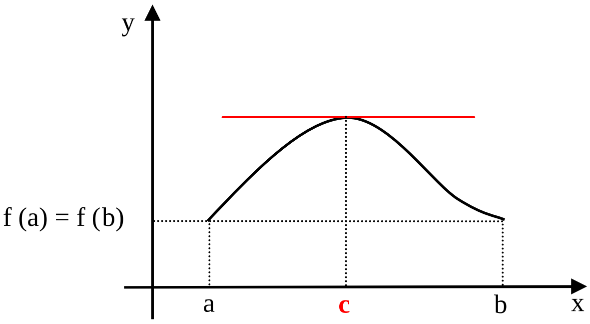
Si calcola la derivata seconda della funzione y = f (x) e si trovano le soluzioni dell'equazione $f^{II}(x) = 0$ e sia x_0 una di queste soluzioni.
Se la prima derivata , dopo la derivata seconda , che non si annulla in x_0 è :
di ordine dispari, la curva ha un flesso in $P_0(x_0, f(x_0))$

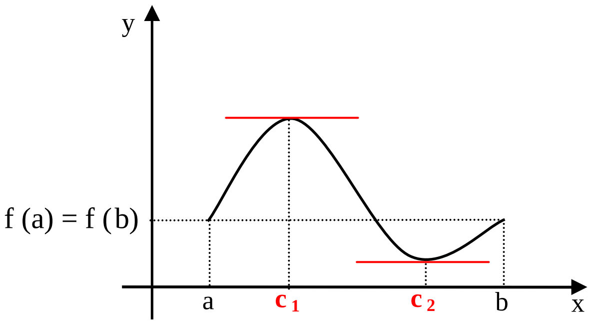
di ordine pari, la curva volge in $P_0(x_0, f(x_0))$ la concavità verso $\begin{cases} \text{l'alto} & \text{se la derivata è positiva} \\ \text{il basso} & \text{se la derivata è negativa} \end{cases}$

Sia f (x) una funzione continua nell' intervallo chiuso [a,b] e derivabile nell' intervallo aperto (a,b) e sia inoltre f (a) = f (b) $\Rightarrow$ *Esiste almeno un punto c ∈ (a, b) nel quale la derivata della funzione è nulla, cioè :* $f'(c) = 0$

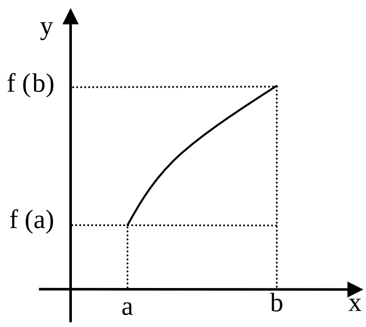
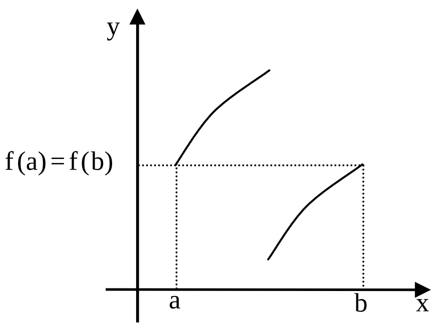
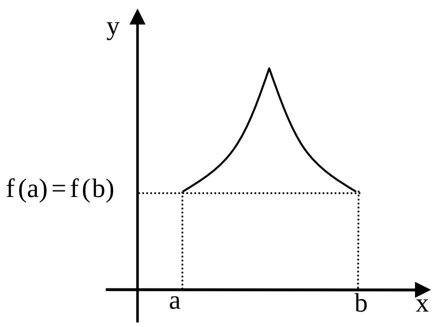
Il significato geometrico del teorema di Rolle è il seguente:

Se un arco di curva, di equazione y = f (x), è dotato di tangente in ciascuno dei suoi punti, esclusi al più gli estremi, ed inoltre ha le ordinate dei due estremi uguali $\Rightarrow$ *Esiste almeno un punto, interno all' arco, nel quale la retta tangente è parallela all' asse delle ascisse.*





Se invece viene a mancare una delle ipotesi del Teorema, l'esistenza del punto $c \in (a,b)$ nel quale la tangente è orizzontale non è assicurata. Si osservano i seguenti controesempi:

f (a) ≠ f (b)	f (x) non è continua in tutto (a, b)	f (x) non è derivabile in tutto (a, b)
		

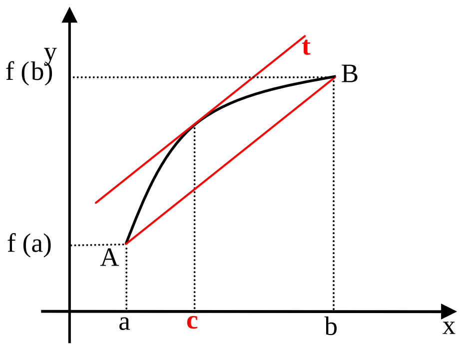
TEOREMA DI LAGRANGE

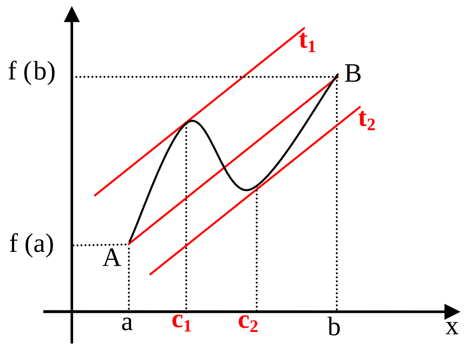
Sia f (x) una funzione continua nello intervallo chiuso [a,b] e derivabile nell'intervallo aperto (a,b) $\Rightarrow$ *Esiste almeno un punto $c \in (a,b)$ nel quale la derivata è uguale al rapporto incrementale della funzione relativo all'intervallo (a, b), cioe :*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

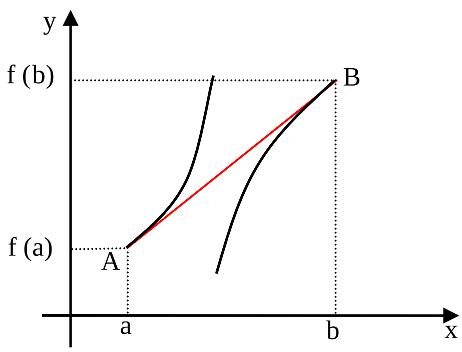
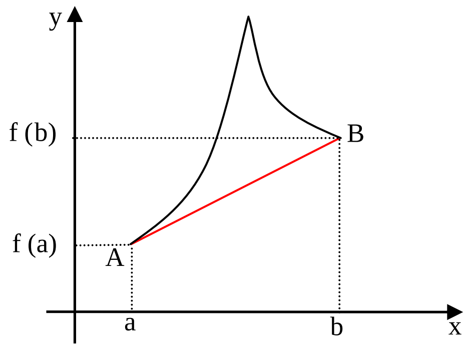
Il significato geometrico del teorema di Lagrange è il seguente:

Se un arco di curva, di equazione $y = f(x)$, è dotato di tangente in ciascuno dei suoi punti, esclusi al più gli estremi $\Rightarrow$ *Esiste almeno un punto, interno all'arco, la cui la retta tangente è parallela alla corda congiungente i punti estremi dell'arco stesso.*





Se invece viene a mancare una delle ipotesi del Teorema, l'esistenza del punto $c \in (a,b)$ nel quale la tangente è parallela alla corda AB non è assicurata. Si osservano i seguenti controesempi:

f (x) non è continua in tutto (a, b)	f (x) non è derivabile in tutto (a, b)
	

$$\left(\begin{array}{l} \text{Sia } x_0 \in (a,b) \text{ e siano } f(x) \text{ e } g(x) \text{ due funzioni :} \\ \text{- continue in } [a,b] \text{ e derivabili in } (a,b) - \{x_0\} \\ \text{- } g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b) - \{x_0\} \\ \text{- } f(x_0) = g(x_0) = 0 \\ \text{- esiste (finito o infinito) il } \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$$

La validità del teorema suddetto si estende anche:

- al caso in cui $x \to \infty$
- al caso in cui le due funzioni sono infinite (forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$).

Applicazioni del Teorema di De L'Hopital

Il teorema di De L'Hopital permette di calcolare molti limiti che si presentano nelle forme indeterminate $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Inoltre, mediante particolari accorgimenti, permette di calcolare anche quelli che si presentano nelle forme indeterminate $0 \cdot \infty$ e $+\infty - \infty$.

Esempi

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - x^2}{x^3 - 1} = \dfrac{0}{0}$ applicando De L'Hopital si ha : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - x^2}{x^3 - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-2x}{3x^2} = -\dfrac{2}{3}$.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5 \operatorname{sen} x}{3x} = \dfrac{0}{0}$ applicando De L'Hopital si ha : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5 \operatorname{sen} x}{3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5 \cos x}{3} = \dfrac{5}{3}$.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 \cdot e^x - 2}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{0}{0}$ applicando De L'Hopital si ha : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 \cdot e^x - 2}{\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 \cdot e^x}{\cos x} = 2$.

$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1 - 3x^2}{5x^2 + 4x - 6} = \dfrac{\infty}{\infty}$ applicando De L'Hopital si ha : $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1 - 3x^2}{5x^2 + 4x - 6} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{-6x}{10x + 4} = \dfrac{\infty}{\infty}$

applicando nuovamente De L'Hopital si ha : $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{-6}{10} = -\dfrac{3}{5}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} x \log x = 0 \cdot \infty$ ma il limite può essere scritto: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\log x}{\frac{1}{x}} = \dfrac{\infty}{\infty}$ e con De L'Hopital si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} \cdot x^2 = \lim_{x\to 0^+} -x = 0 .$$

STUDIO DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

Lo studio del grafico di una funzione avviene esaminando i seguenti punti :

1. *Determinazione del nome e del grado della funzione*
2. *Determinazione del dominio della funzione*
3. *Determinazione dei punti di discontinuità della funzione*
4. *Determinazione di eventuali simmetrie e periodicità*
5. *Determinazione degli eventuali punti di intersezione della curva con gli assi cartesiani*
6. *Determinazione del segno della funzione*
7. *Calcolo dei limiti agli estremi di definizione*
8. *Determinazione degli asintoti della curva*
9. *Calcolo della derivata prima della funzione*
10. *Determinazione del dominio della derivata prima della funzione*
11. *Determinazione dei punti di non derivabilità*
12. *Determinazione dei punti in cui la derivata prima vale zero.*
13. *Determinazione del segno della derivata prima*
14. *Determinazione dei Max e dei Min relativi*
15. *Calcolo della derivata seconda della funzione*
16. *Determinazione del segno della derivata seconda*
17. *Determinazione della concavità della curva e dei punti di flesso.*
18. *Calcolo dei limiti della derivata prima nei punti di frontiera dell'insieme di esistenza*
19. *Rappresentazione grafica della curva, con l'aiuto anche del calcolo di altri punti della curva.*