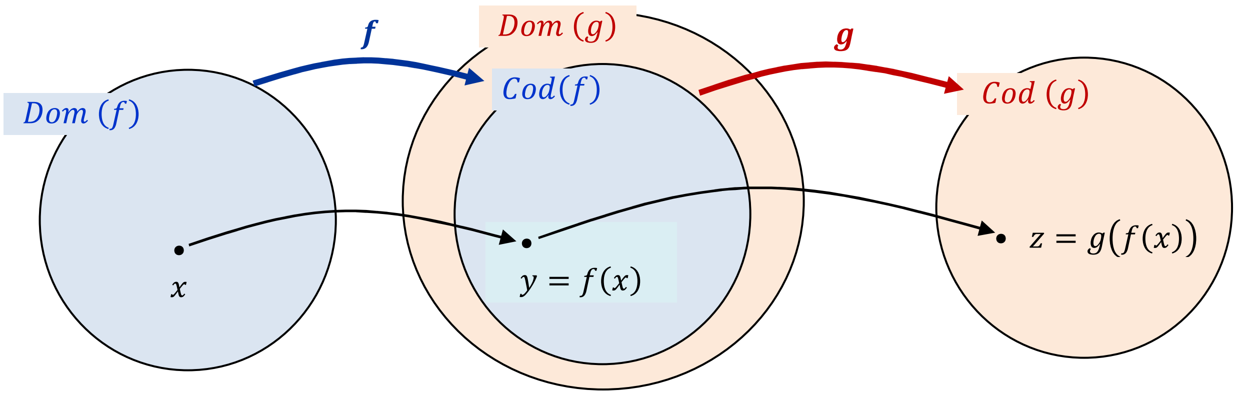
Funzioni composte
Esercizi

Esercizio 1142.272

Date le funzioni $f(x) = sin\,2x$ e $g(x) = \sqrt{x} - 1$ determina $f \circ g$ e $g \circ f$.

<u>*Soluzione*</u>

La composizione $g \circ f$ è ben definita se il codominio di f è contenuto nel dominio di g .



Poiché il $Dom_g = \{x \in R \ / \ x \geq 0\}$, deve risultare che: $sin\,2x \geq 0$.

$sin\,2x \geq 0$; $\qquad 2k\pi \leq 2x \leq \pi + 2k\pi$; $\qquad k\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

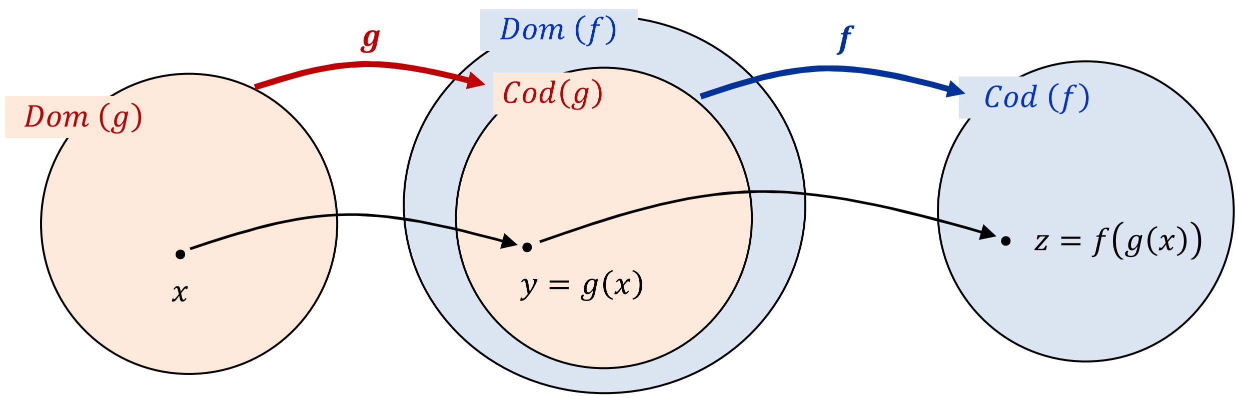
La composizione $g \circ f$ opera nel seguente modo:

$x \quad \xrightarrow{f} \quad y = f(x) = sin\,2x \quad \xrightarrow{g} \quad z = g(y) = g(f(x)) = \sqrt{sin\,2x} - 1$

Il dominio della funzione composta $g \circ f$ è $Dom_{g \circ f} = \left\{x \in R \ / \ k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.

==

La composizione $f \circ g$ è ben definita se il codominio di g è contenuto nel dominio di f .



Poiché il $Dom_f = R$, sicuramente il codominio di g sarà contenuto in $Dom_f = R$.

La composizione $f \circ g$ opera nel seguente modo:

$x \quad \xrightarrow{g} \quad y = g(x) = \sqrt{x} - 1 \quad \xrightarrow{f} \quad z = f(g(x)) = sin\,2(\sqrt{x} - 1)$

Il dominio della funzione composta $f \circ g$ è $Dom_{f \circ g} = \{x \in R \ / \ x \geq 0\}$.

Esercizio 1142.273

Date le funzioni $f(x) = \frac{1}{x-3x^2}$ e $g(x) = e^{-x+2}$ determina $f \circ g$ e $g \circ f$.

Soluzione

La composizione $g \circ f$ è ben definita se il codominio di f è contenuto nel dominio di g .

Poiché il $Dom_{\,g} = R$, sicuramente il codominio di f sarà contenuto in $Dom_{\,g}$.

La composizione $g \circ f$ opera nel seguente modo:

$$x \overset{f}{\rightarrow} y = f(x) = \frac{1}{x-3x^2} \overset{g}{\rightarrow} z = g(y) = g\big(f(x)\big) = e^{-\frac{1}{x-3x^2}+2} \qquad ciò\grave{e} \quad g \circ f = e^{-\frac{1}{x-3x^2}+2}$$

Il dominio della funzione composta $g \circ f$ è $Dom_{\,g\circ f} = \left\{x \in R \;/\; x \neq 0 \;\wedge\; x \neq \frac{1}{3}\right\}$.

==

La composizione $f \circ g$ è ben definita se il codominio di g è contenuto nel dominio di f .

Poiché il $Dom_{\,f} = \left\{x \in R \;/\; x \neq 0 \;\wedge\; x \neq \frac{1}{3}\right\}$, deve risultare che: $e^{-x+2} \neq 0 \quad \wedge \quad e^{-x+2} \neq \frac{1}{3}$

$e^{-\frac{1}{x-3x^2}+2} \neq 0 \qquad \forall\, x \in R$

$e^{-x+2} \neq \frac{1}{3} \qquad \forall\, x \neq 2 + \ln 3$

Infatti: $\ln(e^{-x+2}) = \ln\frac{1}{3}$; $\quad -x+2 = \ln 1 - \ln 3$; $\quad x = 2 + \ln 3$.

La composizione f ∘ g opera nel seguente modo:

$$x \overset{g}{\rightarrow} y = g(x) = e^{-x+2} \overset{f}{\rightarrow} z = f\big(g(x)\big) = \frac{1}{e^{-x+2} - 3(e^{-x+2})^2} \qquad ciò\grave{e} \quad f \circ g = \frac{1}{e^{-x+2} - 3e^{-2x+4}}$$

Il dominio della funzione composta $f \circ g$ è $Dom_{\,f\circ g} = \{x \in R \;/\; x \neq 2 + \ln 3\}$.

Esercizio 1142.274

Date le funzioni $f(x) = \cos\left(-x + \frac{\pi}{6}\right)$ e $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ determina $f \circ g$ e $g \circ f$.

Soluzione

La composizione $g \circ f$ è ben definita se il codominio di f è contenuto nel dominio di g .

Poiché il $Dom_{\,g} = \{x \in R \;/\; x > -1\}$, deve risultare che: $\cos\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) > -1$

Ma $\cos\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) > -1$ per $-x + \frac{\pi}{6} \neq \pi + 2k\pi$; $\quad x \neq -\pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $\quad x \neq -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$.

La composizione g ∘ f opera nel seguente modo:

$$x \overset{f}{\rightarrow} y = f(x) = \cos\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) \overset{g}{\rightarrow} z = g(y) = g\big(f(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{\cos\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) + 1}}$$

Il dominio della funzione composta $g \circ f$ è $Dom_{\,g\circ f} = \left\{x \in R \;/\; x \neq -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right\}$.

==

La composizione $f \circ g$ è ben definita se il codominio di g è contenuto nel dominio di f .

Poiché il $Dom_{\,f} = R$, sicuramente il codominio di g sarà contenuto in $Dom_{\,f}$.

La composizione f ∘ g opera nel seguente modo:

$$x \overset{g}{\rightarrow} y = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \overset{f}{\rightarrow} z = f\big(g(x)\big) = \cos\left(-\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{\pi}{6}\right)$$

Il dominio della funzione composta $f \circ g$ è $Dom_{\,f\circ g} = \{x \in R \;/\; x > -1 \}$.

Esercizio 1142.275

Date le funzioni $f(x) = 2^{\sqrt{x}-4}$ e $g(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$ determina $f \circ g$ e $g \circ f$.

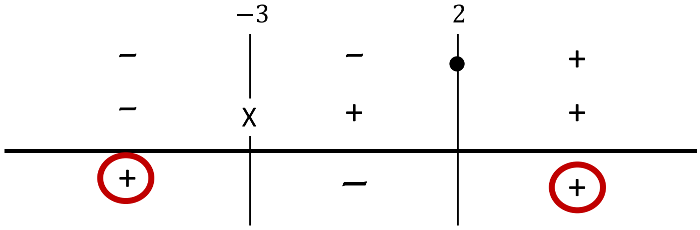
Soluzione

La composizione $g \circ f$ è ben definita se il codominio di f è contenuto nel dominio di g .

Il $Dom_{\,g} = \{x \in R \ / \ x < -3 \quad \vee \quad x \geq 2\}$

Infatti:

$\frac{x-2}{x+3} \geq 0$; $\quad x - 2 \geq 0 \quad x \geq 2$; $\quad x + 3 > 0 \quad x > -3$



Poiché il $Dom_{\,g} = \{x \in R \ / \ x < -3 \quad \vee \quad x \geq 2\}$, deve risultare che $2^{\sqrt{x}-4} < -3 \quad \vee \quad 2^{\sqrt{x}-4} \geq 2$.

$2^{\sqrt{x}-4} < -3$ non ha soluzioni.

$2^{\sqrt{x}-4} \geq 2^1$; $\quad \sqrt{x} - 4 \geq 1$; $\quad \sqrt{x} \geq 5$; $\quad x \geq 25$.

La composizione g ∘ f opera nel seguente modo:

$$x \quad \overset{f}{\rightarrow} \quad y = f(x) = 2^{\sqrt{x}-4} \quad \overset{g}{\rightarrow} \quad z = g(y) = g\big(f(x)\big) = \sqrt{\frac{2^{\sqrt{x}-4} - 2}{2^{\sqrt{x}-4} + 3}}$$

Il dominio della funzione composta $g \circ f$ è $Dom_{\,g \circ f} = \{x \in R \ / \ x \geq 25 \ \}$.

La composizione $f \circ g$ è ben definita se il codominio di g è contenuto nel dominio di f .

Poiché il $Dom_{\,f} = \{x \in R \ / \ x \geq 0\}$, deve risultare che $\sqrt{\frac{x-2}{x+3}} \geq 0$.

$\sqrt{\frac{x-2}{x+3}} \geq 0$; $\quad \frac{x-2}{x+3} \geq 0$; $\quad x < -3 \quad \vee \quad x \geq 2$ risolta precedentemente.

La composizione $f \circ g$ opera nel seguente modo:

$$x \quad \overset{g}{\rightarrow} \quad y = g(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}} \quad \overset{f}{\rightarrow} \quad z = f\big(g(x)\big) = 2^{\sqrt{\sqrt{\frac{x-2}{x+3}}-4}} = 2^{\sqrt[4]{\frac{x-2}{x+3}}-4}$$

Il dominio della funzione composta $f \circ g$ è $Dom_{\,f \circ g} = \{x \in R \ / \ x < -3 \quad \vee \quad x \geq 2 \ \}$.

Esercizio 1142.276

Date le funzioni $f(x) = \sqrt{x} + 3$ e $g(x) = ln\,x + 1$ determina $f \circ g$ e $g \circ f$.

Soluzione

La composizione $g \circ f$ è ben definita se il codominio di f è contenuto nel dominio di g .

Poiché il $Dom_g = \{x \in R \ / \ x > 0\}$, deve risultare che $\sqrt{x} + 3 > 0$.

$\sqrt{x} + 3 > 0$; $\sqrt{x} > -3$; $x \geq 0$.

La composizione g ∘ f opera nel seguente modo:

$$x \quad \xrightarrow{f} \quad y = f(x) = \sqrt{x} + 3 \quad \xrightarrow{g} \quad z = g(y) = g\big(f(x)\big) = ln\big(\sqrt{x} + 3\big) + 1$$

Il dominio della funzione composta $g \circ f$ è $Dom_{g \circ f} = \{x \in R \ / \ x \geq 0\}$.

==

La composizione $f \circ g$ è ben definita se il codominio di g è contenuto nel dominio di f .

Poiché il $Dom_f = \{x \in R \ / \ x \geq 0\}$, deve risultare che $ln\,x + 1 \geq 0$.

$ln\,x + 1 \geq 0$; $ln\,x \geq -1$; $ln\,x \geq ln\,e^{-1}$; $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq e^{-1} \end{cases}$ $x \geq \dfrac{1}{e}$.

La composizione $f \circ g$ opera nel seguente modo:

$$x \quad \xrightarrow{g} \quad y = g(x) = ln\,x + 1 \quad \xrightarrow{f} \quad z = f\big(g(x)\big) = \sqrt{ln\,x + 1} + 3$$

Il dominio della funzione composta $f \circ g$ è $Dom_{f \circ g} = \left\{x \in R \ / \ x \geq \frac{1}{e}\right\}$.