Nella risoluzione delle disequazioni occorre distinguere i seguenti casi:

I ° Tipo - Un solo valore assoluto

$$|f(x)| < g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) < g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| > g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) > g(x) \end{cases}$$

Esempio

$$|x-3| < 2x-8 \iff \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-3 < 2x-8 \end{cases} \cup \begin{cases} x-3 < 0 \\ -(x-3) < 2x-8 \end{cases}$$

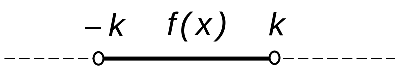
$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x > 5 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 3 \\ x > \dfrac{11}{3} \end{cases}$$

$$x > 5 \quad \cup \quad \phi$$

La soluzione è $x > 5$.

Sottocasi

$|f(x)| < k$ (con k > 0) $\iff \begin{cases} f(x) < k \\ f(x) > -k \end{cases}$



$|f(x)| > k$ (con k > 0) $\iff f(x) < -k \;\cup\; f(x) > k$

$|f(x)| < k$ (con k < 0) $\iff$ N.S.R.

$|f(x)| > k$ (con k < 0) $\iff \forall x \in R$

$|f(x)| > 0 \iff f(x) \neq 0$

$|f(x)| \geq 0 \iff \forall x \in R$

Esempi

$|x-3| < 5 \quad \begin{cases} x-3 < 5 \\ x-3 > -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 8 \\ x > -2 \end{cases}$ *la soluzione è* $-2 < x < 8$.

$|x-3| > 5 \quad \begin{cases} x-3 < -5 \\ x-3 > 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -2 \\ x > 8 \end{cases}$ *la soluzione è* $x < -2; \quad x > 8$.

$|2x - 3| < -5$ N.S.R.

$|2x-4| \geq 0 \quad \forall x \in R$

$|2x - 3| > -5 \quad \forall x \in R$

$|2x-4| > 0 \; ; \; 2x-4 \neq 0 \; ; \; x \neq 2$

II ° Tipo - Due o più valori assoluti

Occorre determinare dapprima i segni dei valori assoluti che figurano nell'equazione. Dall'esame dei segni si studiano i vari casi. Si esamini l'esempio.

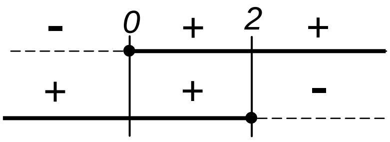
Esempio

Risolvere la disequazione : $2 \cdot |x| < |4 - 2x| + 3$

Si studiano i segni delle espressioni in valore assoluto :

$x \geq 0 \qquad x \geq 0$

$4 - 2x \geq 0 \qquad x \leq 2$



Dall'esame dei segni si ottengono tre sistemi :

$$\begin{cases} x < 0 \\ 2 \cdot (-x) < (4 - 2x) + 3 \end{cases} \quad U \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 2x < 4 - 2x + 3 \end{cases} \quad U \quad \begin{cases} x > 2 \\ 2x < -(4 - 2x) + 3 \end{cases}$$

$$x < 0 \quad U \quad 0 \leq x < \frac{7}{4} \quad U \quad \phi$$

La soluzione è $x < \frac{7}{4}$.