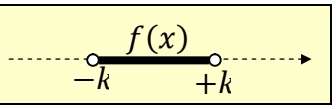
VALORE ASSOLUTO

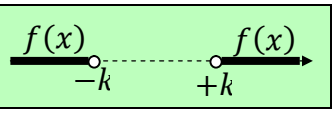
Il valore assoluto di una espressione algebrica $f(x)$ *è:* $|f(x)| = \begin{cases} +f(x) & se\ f(x) \geq 0 \\ -f(x) & se\ f(x) < 0 \end{cases}$

DISEQUAZIONI CON VALORI ASSOLUTI

$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| < k \quad (con\ k > 0) \quad \Leftrightarrow \quad -\boldsymbol{k} < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < +k \quad ossia \quad \begin{cases} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > -k \\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < +k \end{cases}$



$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| > k \quad (con\ k > 0) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < -k \quad \vee \quad f(\boldsymbol{x}) > k$



$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| < k \quad (con\ k < 0) \quad \Leftrightarrow \quad \nexists\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$

$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| > k \quad (con\ k < 0) \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$

$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nexists\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$

$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$

$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \leq \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$

$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \geq \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$

$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| < g(\boldsymbol{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < g(\boldsymbol{x}) \end{cases} \cup \begin{cases} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < 0 \\ -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < g(\boldsymbol{x}) \end{cases}$

$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| > g(\boldsymbol{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > g(\boldsymbol{x}) \end{cases} \cup \begin{cases} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < 0 \\ -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > g(\boldsymbol{x}) \end{cases}$

Quando infine, figurano due o più valori assoluti, occorre determinare i segni dei valori assoluti che figurano nella disequazione. Dall'esame dei segni si studiano i vari casi.

Esempio 1

$\boldsymbol{|x-1|-3} < 0$

$|x-1| < 3$;

Applicando la regola gialla si ha:

$-3 < x - 1 < +3$; *trasportiamo -1 a sinistra e a destra*

$-3 + 1 < x < +3 + 1$;

$-2 < x < 4$.

La disequazione è verificata per $\boldsymbol{-2} < x < 4$.

Esempio 2

$\boldsymbol{|x-1|-3} > 0$

$|x-1| > 3$;

Applicando la regola verde si ha:

$x - 1 < -3 \quad \vee \quad x - 1 > +3$;

$x < -2 \quad \vee \quad x > 4$. ;

La disequazione è verificata per $\boldsymbol{x < -2} \quad \vee \quad \boldsymbol{x} > 4$.

Esempio 3

$\boldsymbol{|x-1|+3} < 0$

$|x-1| < -3$;

Applicando la regola arancio si ha che:

la disequazione è verificata per $\nexists\, \boldsymbol{x \in R}$ **.**

Esempio 4

$\boldsymbol{|x-1|+3} > 0$

$|x-1| > -3$;

Applicando la regola arancio si ha che:

la disequazione è verificata per $\forall\, \boldsymbol{x \in R}$ **.**

Esempio 5

$\boldsymbol{|x-1|} < 0$

Applicando la regola azzurra si ha: $\nexists\, \boldsymbol{x \in R}$ **.**

Esempio 6

$\boldsymbol{|x-1| \leq 0}$

Applicando la regola azzurra si ha: $x - 1 = 0$;

La disequazione è verificata per $\boldsymbol{x = 1}$ **.**

Esempio 7

$\boldsymbol{|x-1|>0}$

Applicando la regola azzurra si ha: $x-1\neq 0$ *;*

La disequazione è verificata per $\boldsymbol{\forall\, x\neq 1}$ **.**

Esempio 8

$\boldsymbol{|x-1|\geq 0}$

Applicando la regola azzurra si ha che:

la disequazione è verificata per $\boldsymbol{\forall\, x\in R}$ **.**

Esempio 9

$\boldsymbol{|2x+1|\leq x+4}$

Applicando la regola rosa si ha:

$$\begin{cases} 2x+1\geq 0 \\ +(2x+1)\leq x+4 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} 2x+1<0 \\ -(2x+1)\leq x+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq -\frac{1}{2} \\ +(2x+1)\leq x+4 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x<-\frac{1}{2} \\ -(2x+1)\leq x+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq -\frac{1}{2} \\ x\leq 3 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x<-\frac{1}{2} \\ -3x\leq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq -\frac{1}{2} \\ x\leq 3 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x<-\frac{1}{2} \\ x\geq -\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2}\leq x\leq 3 \quad \cup \quad -\frac{5}{3}\leq x\leq -\frac{1}{2}$$

La disequazione è verificata per $\boldsymbol{-\frac{5}{3}\leq x\leq 3}$.

Esempio 10

$\boldsymbol{|2x+1|-x-4>0}$

$|2x+1|>x+4$

Applicando la regola rosa si ha:

$$\begin{cases} 2x+1\geq 0 \\ +(2x+1)>x+4 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} 2x+1<0 \\ -(2x+1)>x+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq -\frac{1}{2} \\ x>3 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x<-\frac{1}{2} \\ -(2x+1)>x+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq -\frac{1}{2} \\ x>3 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x<-\frac{1}{2} \\ -3x>5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq -\frac{1}{2} \\ x>3 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x<-\frac{1}{2} \\ x<-\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$x>3 \quad \cup \quad x<-\frac{5}{3}$$

La disequazione è verificata per $\boldsymbol{x}<-\frac{5}{3} \quad \vee \quad \boldsymbol{x}>3$.

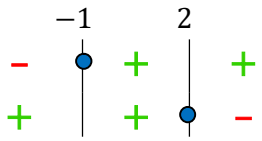
Esempio 11

$\boldsymbol{|x+1|+|4-2x|}<6$

Si studiano i segni delle espressioni in valore assoluto :

$x+1\geq 0 \qquad x\geq -1$

$4-2x\geq 0 \qquad x\leq 2$



Dall'esame dei segni si ottengono tre sistemi :

$$\begin{cases} x<-1 \\ -(x+1)+(4-2x)<6 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} -1\leq x\leq 2 \\ +(x+1)+(4-2x)<6 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x>2 \\ +(x+1)-(4-2x)<6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<-1 \\ -x-1+4-2x<6 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} -1\leq x\leq 2 \\ x+1+4-2x<6 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x>2 \\ x+1-4+2x<6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<-1 \\ -3x<3 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} -1\leq x\leq 2 \\ -x<1 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x>2 \\ 3x<9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<-1 \\ x>-1 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} -1\leq x\leq 2 \\ x>-1 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x>2 \\ x<3 \end{cases}$$

$$\phi \quad \cup \quad -1<x\leq 2 \quad \cup \quad 2<x<3.$$

La disequazione è verificata per $\boldsymbol{-1}<x<3$.

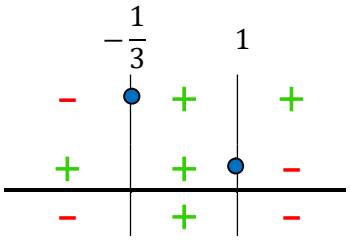
Esempio 12

$\boldsymbol{|x+1| \geq |2x|}$

$(x+1)^2 \geq (2x)^2$	*Eleviamo ambo i membri al quadrato ed eliminiamo i valori assoluti*
$(x+1)^2 - (2x)^2 \geq 0$	*Portiamo* $(2x)^2$ *al primo membro*
$[(x+1)+(2x)] \cdot [(x+1)-(2x)] \geq 0$	*Scomponiamo la differenza di due quadrati*
$(3x+1) \cdot (1-x) \geq 0$	*Risolviamo la disequazione prodotto*

$3x+1 \geq 0 \qquad x \geq -\frac{1}{3}$

$1-x \geq 0 \qquad x \leq 1$



La disequazione è verificata per $\boldsymbol{-\frac{1}{3} \leq x \leq 1}$.