Termodinamica

I Principio Termodinamica $Q = L + \Delta U$	**Adiabatica** Nessun scambio di calore con l'esterno. La temperatura varia	**Isobara** Pressione costante	**Isoterma** Temperatura Costante	**Isocora** Volume costante
	$L = -\Delta U \quad Q = 0$	$L = p \cdot \Delta V$	$L = Q \quad \Delta U = 0$	$L = 0 \quad Q = \Delta U$
Equazione di Stato $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ $\Downarrow$ $\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$ $V_T = k_1 \cdot T$ $P_T = k_2 \cdot T$	$L = -C_{mV} \cdot n \cdot \Delta T$ $L = -m \cdot c_V \cdot \Delta T$ $L = \frac{p_2 \cdot V_2 - p_1 \cdot V_1}{1-\gamma}$ $p_1 \cdot V_1^{\gamma} = p_2 \cdot V_2^{\gamma}$ $T_1 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_2^{\gamma-1}$ $T_1 \cdot p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 \cdot p_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$	$L = n \cdot R \cdot \Delta T$ $Q = C_{mp} \cdot n \cdot \Delta T$ $\Delta U = C_{mV} \cdot n \cdot \Delta T$ $V_T = \frac{V_0}{273} T$ $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$	$L = n\,R\,T \ln \frac{V_2}{V_1}$ $L = n\,R\,T \ln \frac{P_1}{P_2}$ $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$	$Q = c_V \cdot m \cdot \Delta T$ $Q = C_{mV} \cdot n \cdot \Delta T$ $p_T = \frac{p_0}{273} T$ $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$

Note

Per il calcolo del lavoro fatto contro l'esterno occorre considerare la pressione esterna del cilindro (ad esempio, uno spostamento del pistone in un ambiente vuoto non comporta Lavoro). Il lavoro è rappresentato dall'area della porzione di piano definita dalla curva P = f (V) con estremi il valore iniziale e il valore finale del volume.

$$C_{mV} = \begin{cases} \frac{3}{2} R \cong 12{,}5\, J/mol \cdot K & \text{per un gas monoatomico} \\ \frac{5}{2} R \cong 20{,}8\, J/mol \cdot K & \text{per un gas biatomico} \\ \frac{7}{2} R \cong 29\, J/mol \cdot K & \text{per un gas di più atomi} \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{C_{mP}}{C_{mV}} = \begin{cases} 1{,}67 & \text{per un gas monoatomico} \\ 1{,}40 & \text{per un gas biatomico} \\ 1{,}29 & \text{per un gas di tre o più atomi} \end{cases}$$

$R = 8{,}314 \;\; J/(k \cdot mol)$

$R = 0{,}0821 \;\; (l \cdot Atm)/(k \cdot mol)$

$N = \frac{m}{M} \cdot N_0 \qquad n = \frac{N}{N_0} \qquad n = \frac{m}{M}$

$C_{mP} = M \cdot c_p \qquad C_{mV} = M \cdot c_V$

$\gamma = \frac{C_{mP}}{C_{mV}} \qquad C_{mP} = C_{mV} + R$

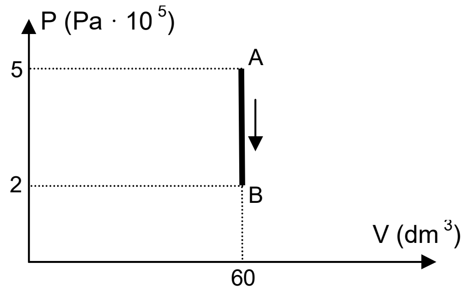
c_V = *Calore specifico a volume costante*
c_P = *Calore specifico a pressione costante*
C_{mV} = *Calore specifico molare a Volume costante*
C_{mP} = *Calore specifico molare a Pressione costante*
m = *massa della molecola (in grammi)*
M = *Peso molecolare o massa molecolare*
N = *Numero molecole*
N_0 = $6{,}02 \cdot 10^{23}$ *(numero di Avogadro)*
n = *numero di moli (n° di grammomolecole)*

Unità di misura

1 J	=	0,239 cal	=	0,102 Kg_P m	=	$9{,}87 \cdot 10^{-3}$ l Atm	=	$2{,}78 \cdot 10^{-7}$ KWh
1 J	=	1 N · 1 m		$1kg \cdot 1m^2/s^2$		1 Pa · m^3		
1 Pa = 1 N / m^2	=	1 J / m^3	=	10 dine / cm^2	=	$9{,}87 \cdot 10^{-6}$ Atm		
1 cal = 0,001 Kcal	=	4,186 J	=	0,427 Kg_P m		$4{,}13 \cdot 10^{-2}$ l Atm		
1 Kg_P m	=	9,8 J	=	2,34 cal	=	$9{,}7 \cdot 10^{-2}$ l Atm		
1 l · Atm	=	101,3 J	=	24,2 cal	=	10,33 Kg_P m		
1 Atm	=	$1{,}013 \cdot 10^5$ Pa	=	$1{,}013 \cdot 10^5$ N / m^2		760 mmHg=760 Torr		
1 mmHg (torr)	=	133,3 Pa						
1 bar	=	10^5 dine / cm^2		1,02 Atm				
1 W	=	0,239 cal / s	=	$1{,}36 \cdot 10^{-3}$ CV	=	0,102 Kg_P m/s		
1 CV	=	736 W	=	75 Kg_P m/s	=	175,7 cal / s		
1 N	=	10^5 dine	=	0,102 Kg_P		$1kg \cdot m/s^2$		
1 Kg_P	=	9,8 N		$1kg \cdot 9{,}8 m/s^2$				

Esempio 1 - isocora

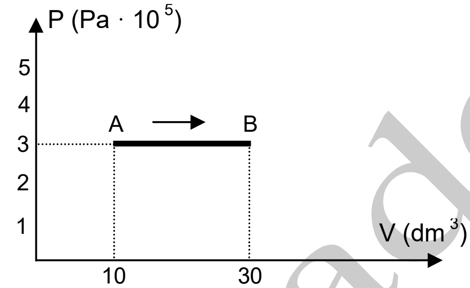
7 moli di gas monoatomico sono contenuti in un recipiente chiuso del volume di 60 litri. Inizialmente la sua pressione è di $5 \cdot 10^5\ Pa$, mentre dopo un certo periodo di tempo la pressione si attesta sul valore di $2 \cdot 10^5\ Pa$.
Determinare la quantità di calore perso dal sistema, il salto termico subito dal gas e la variazione della sua energia interna.



Soluzione
La trasformazione in questione è una isocora, perché il recipiente è chiuso e il suo volume è costante.
La quantità di calore perso dal sistema è uguale alla variazione della sua energia interna, cioè:
$Q = \Delta U = C_{mV} \cdot n \cdot \Delta T$ *, ma per calcolarla occorre conoscere il salto termico* $\Delta T = T_B - T_A$.
Dall'equazione di stato $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$
si ricava $T_A = \frac{P_A \cdot V_A}{n \cdot R} = \frac{5 \cdot 10^5\ Pa \cdot 6 \cdot 10^{-2}\ m^3}{7\ mol \cdot 8{,}314\ J/(k \cdot mol)} =$
$= \frac{5 \cdot 10^5\ J/m^3 \cdot 6 \cdot 10^{-2}\ m^3}{7\ mol \cdot 8{,}314\ J/(k \cdot mol)} = 515{,}5\ K.$
$T_B = \frac{P_B \cdot V_B}{n \cdot R} = \frac{2 \cdot 10^5\ Pa \cdot 6 \cdot 10^{-2}\ m^3}{7\ mol \cdot 8{,}314\ J/(k \cdot mol)} =$
$= \frac{2 \cdot 10^5\ J/m^3 \cdot 6 \cdot 10^{-2}\ m^3}{7\ mol \cdot 8{,}314\ J/(k \cdot mol)} = 206{,}2\ K.$
$\Delta T = T_B - T_A = (206{,}2 - 515{,}5)\ K = -309{,}3\ K$
$Q = \Delta U = C_{mV} \cdot n \cdot \Delta T =$
$= 12{,}5\ J/(K \cdot mol) \cdot 7\ mol \cdot (-309{,}3)\ K = -27064\ J.$

Esempio 2 - isobara

Due moli di un gas biatomico che si trovano in un cilindro avente un volume di 10 litri, alla pressione di $3 \cdot 10^5\ Pa$ vengono espansi mediante riscaldamento a pressione costante fino al volume di 30 litri.



Determinare la temperatura corrispondente allo stato finale, il calore che deve essere fornito al gas per produrre la trasformazione, la variazione dell'energia interna del gas e il lavoro effettuato dal gas.

Soluzione
$V_B = 30$ *litri* $= 30\ dm^3 = 0{,}03\ m^3.$
$T_A = \frac{P_A \cdot V_A}{n \cdot R} = \frac{3 \cdot 10^5\ Pa \cdot 0{,}01\ m^3}{2\ mol \cdot 8{,}314\ J/(k \cdot mol)} =$
$= \frac{3 \cdot 10^5\ J/m^3 \cdot 0{,}01\ m^3}{2\ mol \cdot 8{,}314\ J/(k \cdot mol)} = 180{,}42\ K$
$T_B = \frac{P_B \cdot V_B}{n \cdot R} = \frac{3 \cdot 10^5\ Pa \cdot 0{,}03\ m^3}{2\ mol \cdot 8{,}314\ J/(k \cdot mol)} =$
$= \frac{3 \cdot 10^5\ J/m^3 \cdot 0{,}03\ m^3}{2\ mol \cdot 8{,}314\ J/(k \cdot mol)} = 541{,}26\ K$
$\Delta T = T_B - T_A = (541{,}26 - 180{,}42)\ K = 360{,}84\ K.$

Il calore che deve essere fornito al gas è dato da:
$Q = C_{mP} \cdot n \cdot \Delta T$ *con*
$C_{mP} = C_{mV} + R = \frac{5}{2} R + R = \frac{7}{2} R =$
$= 29{,}01\ J/(k \cdot mol) \cong 29\ J/(k \cdot mol)$
$Q = C_{mP} \cdot n \cdot \Delta T = 29\ J/(k \cdot mol) \cdot 2\ mol \cdot 360{,}84\ K =$
$= 20929\ J.$
$C_{mV} = \frac{5}{2} R = \frac{7}{2} R = 20{,}785\ J/(k \cdot mol) \cong$
$\cong 20{,}8\ J/(k \cdot mol)$

La variazione dell'energia interna del gas è *data da:*
$\Delta U = C_{mV} \cdot n \cdot \Delta T =$
$= 20{,}8\ J/(K \cdot mol) \cdot 2\ mol \cdot (360{,}84)\ K = 15011\ J.$

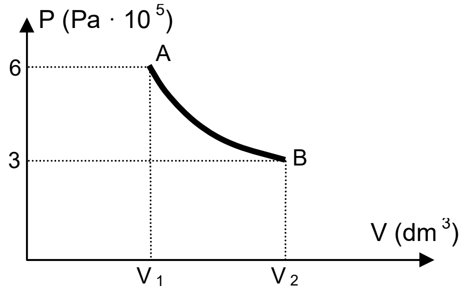
Il lavoro effettuato dal gas è dato da:
$L = P \cdot \Delta V = 3 \cdot 10^5\ Pa \cdot (0{,}03 - 0{,}01)\ m^3 = 6000\ J$

Come verifica dei risultati si ha:
$Q = L + \Delta U$; $20929\ J = (6000 + 15011)\ J$;

20929 J = 21011 J . Le piccole differenze dei valori ottenuti sono determinate dalle approssimazioni numeriche utilizzate nei calcoli.

Esempio 3 - isoterma

In una trasformazione isoterma due moli di gas passano da uno stato iniziale caratterizzato da una pressione di $6 \cdot 10^5\ Pa$ ed una temperatura di –30°C ad uno stato finale caratterizzato da una pressione di $3 \cdot 10^5\ Pa$.
Determinare il calore che viene fornito, il lavoro che viene effettuato, il volume iniziale e il volume finale della trasformazione.



Soluzione

Il calore che viene fornito, uguale al lavoro che viene effettuato è dato da: $Q = L = n\,R\,T\,ln\dfrac{P_1}{P_2} =$

$= 2\ mol \cdot 8{,}314\ J/(K \cdot mol) \cdot 243{,}15\ K \cdot log_e \dfrac{6 \cdot 10^5\ Pa}{3 \cdot 10^5\ Pa} =$

$= 8086\ J.$

Dall'equazione di stato $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$ *si ha:*

$$V_A = \frac{n \cdot R \cdot T}{P_A} = \frac{2\ mol \cdot 8{,}314\ J/(K \cdot mol) \cdot 243{,}15\ K}{6 \cdot 10^5\ Pa} =$$

$$= \frac{2\ mol \cdot 8{,}314\ J/(K \cdot mol) \cdot 243{,}15\ K}{6 \cdot 10^5\ J/m^3} = 0{,}0067385\ m^3 =$$

$= 6{,}74\ dm^3.$

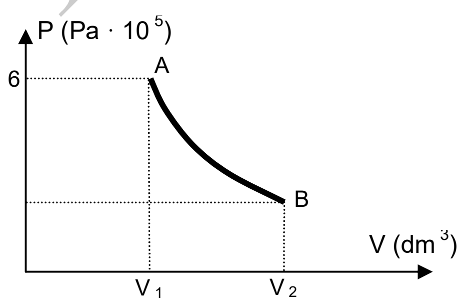
$$V_B = \frac{n \cdot R \cdot T}{P_B} = \frac{2\ mol \cdot 8{,}314\ J/(K \cdot mol) \cdot 243{,}15\ K}{3 \cdot 10^5\ Pa} =$$

$$= \frac{2\ mol \cdot 8{,}314\ J/(K \cdot mol) \cdot 243{,}15\ K}{3 \cdot 10^5\ J/m^3} = 0{,}013477\ m^3 =$$

$= 13{,}48\ dm^3.$

Esempio 4 - adiabatica

Tre moli di gas biatomico sono racchiusi in un cilindro di volume 10 litri alla pressione di $6 \cdot 10^5\ Pa$. Il gas viene portato adiabaticamente ad un volume di 20 litri.
Determinare la pressione e la temperatura nel nuovo stato, il lavoro compiuto durante l'espansione e la variazione di energia interna del gas.



Soluzione

Dall'equazione di stato $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$ *si ha:*

$$T_A = \frac{P_A \cdot V_A}{n \cdot R} = \frac{6 \cdot 10^5\ Pa \cdot 0{,}01\ m^3}{3\ mol \cdot 8{,}314\ J/(K \cdot mol)} = 240{,}56\ K$$

Essendo un gas biatomico $\gamma = 1{,}40$, *dalla formula* $P_1 \cdot V_1^{\gamma} = P_2 \cdot V_2^{\gamma}$ *si ha la pressione del nuovo stato:*

$$P_B = P_A \cdot \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma} = 6 \cdot 10^5\ Pa \cdot \left(\frac{0{,}01}{0{,}02}\right)^{1{,}40} = 227357\ Pa$$

La temperatura del nuovo stato è:

$$T_B = \frac{P_B \cdot V_B}{n \cdot R} = \frac{227357\ Pa \cdot 0{,}02\ m^3}{3\ mol \cdot 8{,}314\ J/(K \cdot mol)} = 182{,}31\ K$$

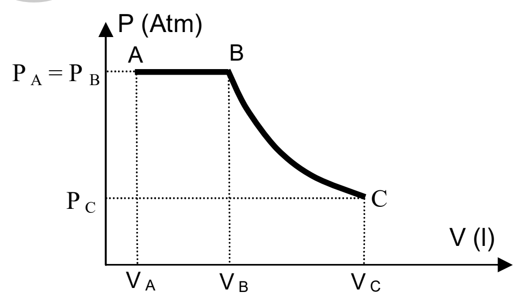
Il lavoro compiuto durante la l'espansione vale:

$L = -\Delta U = -C_{mV} \cdot n \cdot \Delta T =$

$= -20{,}8\ (J/(k \cdot mol)) \cdot 3 \cdot (182{,}31 - 240{,}56) T = 3635\ J$

Esempio 5 – Isobara + Isoterma

Sei moli di ossigeno a 500 k si trovano all'interno di un contenitore sormontato da un pistone libero di muoversi. Si scalda il gas ottenendo un sollevamento del pistone, in modo tale che il volume a disposizione triplichi. Successivamente, mantenendo costante la temperatura, si solleva ancora il pistone, ottenendo una pressione finale di 1,5 Atm. Quale è il volume del gas ?



Soluzione

La pressione del gas nello stato iniziale A equilibra la pressione atmosferica (pari a 1 Atm) esistente sopra il pistone. Pertanto $p_A = 1 Atm$.

Il volume del gas nello stato iniziale A è quindi:

$$V_A = \frac{n \cdot R \cdot T_A}{p_A} = \frac{6\ mol \cdot 0{,}0821 \dfrac{l \cdot Atm}{k \cdot mol} \cdot 500\ K}{1\ Atm} =$$

$= 246{,}3\ litri$.

Il volume del gas nello stato intermedio B è:

$V_B = 3 \cdot V_A = 3 \cdot 246{,}3\ litri = 738{,}9\ litri$.

Essendo la trasformazione AB isobara, la pressione nello stato intermedio B è: $p_B = p_A = 1 Atm$.

Dalla formula della isobara $\dfrac{V_A}{T_A} = \dfrac{V_B}{T_B}$ *si ottiene la temperatura del gas nello stato intermedio B:*

$$T_B = \frac{T_A \cdot V_B}{V_A} = \frac{500\ K \cdot 738{,}9\ l}{246{,}3\ l} = 1500\ k.$$

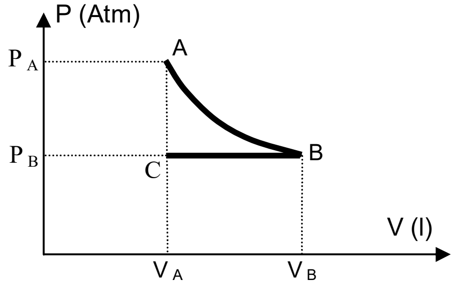
Essendo la trasformazione BC isoterma, la temperatura del gas nello stato finale C è: $T_C = T_B = 1500\ k$.

Dalla formula della isoterma $p_B \cdot V_B = p_C \cdot V_C$ *si ottiene il volume del gas nello stato finale C:*

$$V_C = \frac{p_B \cdot V_B}{p_C} = \frac{1\ Atm \cdot 738{,}9}{1{,}5\ Atm} = 492{,}6\ litri\ .$$

Esempio 6 - Isoterma + Isobara

Tre moli di gas alla temperatura iniziale $T_A = 400\ k$ subiscono un'espansione isoterma AB in modo da raddoppiare il loro volume. Il gas è quindi compresso isobaricamente sino a tornare al volume di partenza. Calcola la pressione, il volume e la temperatura del gas nello stato finale C.



Soluzione

Dalla formula della isoterma $p_A \cdot V_A = p_B \cdot V_B$ *si ottiene la pressione del gas nello stato intermedio B*

$$p_B = \frac{p_A \cdot V_A}{V_B} = \frac{p_A \cdot V_A}{2 \cdot V_A} = \frac{p_A}{2}.$$

Essendo la trasformazione BC isobara, la pressione nello stato finale C è: $p_C = p_B = \frac{p_A}{2}$.

Dalla formula della isobara $\frac{V_B}{T_B} = \frac{V_C}{T_C}$ *si ottiene la temperatura del gas nello stato finale C:*

$$T_C = \frac{T_B \cdot V_C}{V_B} = \frac{400\ K \cdot V_A}{2 \cdot V_A} = 200\ k\ .$$

Ricordando che: "Una mole di un qualsiasi gas, indipendentemente dalla sua massa molecolare, alla temperatura di O°C e alla pressione di 1 Atm occupa sempre il volume V = 22,41 litri".

Se il gas, nella trasformazione BC, è compresso isobaricamente a pressione atmosferica normale (1 Atm) si può calcolare il volume nello stato C.

Per una mole si ha:

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V_C}{T_C}\ ;\ V_C = T_C \cdot \frac{V_0}{T_0} = 200\ k \cdot \frac{22{,}41\ l}{273\ k} = 16{,}42\ l$$

I tre moli di gas hanno quindi un volume:

$V_C = 3 \cdot 16{,}42\ l = 49{,}26\ l$.

Esempio 6 - Massa

Calcola la massa di una mole di un gas ideale che, a $300\ k$, pressione atmosferica, volume uguale a 1,4 litri, ha una massa di 3 g.

Soluzione

Dall'equazione di stato dei gas perfetti: $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$ *si ottiene il numero dei moli del gas:*

$$n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{1\ Atm \cdot 1{,}4\ l}{0{,}0821 \frac{l \cdot Atm}{k \cdot mol} \cdot 300\ k} = 0{,}0568\ mol$$

La massa di una mole (peso molecolare o massa molecolare) è: $M = \frac{m}{n} = \frac{3\ g}{0{,}0568\ mol} = 52{,}8\ g/mol$.

Esercizio 17 (pag.97) **- isobara**

Una mole di gas ideale monoatomico è contenuta in un cilindro dotato di pistone mobile senza attrito e di peso trascurabile. Inizialmente la sua pressione vale 10^5 Pa e la sua temperatura -73,15 °C. Si fornisce calore al gas mantenendo la sua pressione costante e fino a quando il suo volume diventa doppio.

Determinare la temperatura finale del gas, il lavoro compiuto da esso, il calore fornito al gas.

Soluzione

In una trasformazione isobara, volume e temperatura, in ° Kelvin, sono direttamente proporzionali $\frac{P \cdot V}{T} = Cost$

Pertanto, dato che il volume è raddoppiato, anche la temperatura assoluta raddoppia.

Essendo T_1 *= -73,15 °C = (273,15 - 73,15) °K = 200°K*

allora $T_2 = 2 \cdot T_1 = 2 \cdot 200$ *°K = 400 °K .*

Il lavoro compiuto dal gas è $L = p \cdot \Delta V = n \cdot R \cdot \Delta T =$

$$1\ mol \cdot 8{,}314 \frac{J}{k \cdot mol} \cdot 200\ K = 1662{,}8\ J\ .$$

Essendo il gas monoatomico, *il calore specifico molare a pressione costante è* $C_{mP} = \frac{5}{2} R$.

Pertanto il calore fornito al gas è $Q = C_{mP} \cdot n \cdot \Delta T =$

$$\frac{5}{2} R \cdot n \cdot \Delta T = \frac{5}{2} \cdot 8{,}314 \frac{J}{K \cdot mol} \cdot 1\ mol \cdot 200\ K = 4157\ J\ .$$

Esercizio 18 - isobara

3 moli di gas monoatomico vengono riscaldate alla pressione costante di 1,5 Atm facendolo espandere da 40 litri a 60 litri. Calcolare il lavoro compiuto dal gas e l'aumento di temperatura.

Soluzione

Essendo la pressione costante, la trasformazione è una isobara.

Il lavoro compiuto dal gas è:

$L = P \cdot \Delta V = 1{,}5\ Atm \cdot 20\ l = 30\ l \cdot Atm = 30 \cdot 101{,}3\ J =$

$= 3039\ J.$

Dalla formula $L = n \cdot R \cdot \Delta T$ *si ha:*

$$\Delta T = \frac{L}{n \cdot R} = \frac{3039\ J}{3\ mol \cdot 8{,}314\ J/K \cdot mol} = 121{,}8\ K.$$

Esercizio 19 - isobara

10 g di aeriforme ideale monoatomico di massa molare 20 g/mole, contenuti in un cilindro disposto orizzontalmente, dotato di stantuffo mobile, ricevono una quantità di calore pari a 1000 J. Il riscaldamento viene effettuato a pressione costante e in totale assenza di attriti e si sa che la pressione esterna vale 10^5 Pa.
Determinare il salto termico del gas, la variazione della sua energia interna, il lavoro fatto contro l'esterno e la variazione volumica.

Soluzione

10 g di gas ideale avente massa molare 20 g/mole rappresentano $n = \dfrac{10\ g}{20\ g/mol} = 0{,}5\ moli$

Essendo il gas monoatomico, *il calore specifico molare a pressione costante è* $C_{mP} = \dfrac{5}{2} R$.

In una isobara $Q = C_{mP} \cdot n \cdot \Delta T$ *, quindi*

$$\Delta T = \frac{Q}{n \cdot C_{mP}} = \frac{1000\ J}{\dfrac{10\ g}{20\ g/mol} \cdot \dfrac{5}{2} R} = \frac{1000\ J}{0{,}5\ mol \cdot \dfrac{5}{2} \cdot 8{,}314\ \dfrac{J}{K\ mol}} = 96\ °K$$

Essendo il gas monoatomico, *il calore specifico molare a volume costante è* $C_{mV} = \dfrac{3}{2} R$.

La variazione dell'energia interna è $\Delta U = C_{mV} \cdot n \cdot \Delta T =$

$$= \frac{3}{2} R \cdot n \cdot \Delta T = \frac{3}{2} \cdot 8{,}314\ \frac{J}{K\ mol} \cdot 0{,}5\ moli \cdot 96\ K = 599\ J.$$

Il lavoro compiuto dal gas è $L = p \cdot \Delta V = n \cdot R \cdot \Delta T =$

$$0{,}5\ mol \cdot 8{,}314\ \frac{J}{k \cdot mol} \cdot 96\ K = 400\ J .$$

In una isobara $L = P \cdot \Delta V$ *, quindi* la *variazione* volumica

è $\Delta V = \dfrac{L}{P} = \dfrac{400\ J}{10^5\ Pa} = 0{,}004\ \dfrac{J}{Pa} = 0{,}004\ \dfrac{N \cdot m}{N/m^2} =$

$0{,}004 m^3$

Esercizio 20 - isocora

In un recipiente ermeticamente chiuso sono contenuti 1000 g di un gas avente calore specifico a volume costante pari a 0,24 $cal/(g \cdot °C)$. Dopo un certo tempo si constata che il gas ha subito una variazione di temperatura di -10 °C.
Determinare la variazione dell'energia interna del gas e il calore scambiato da esso con l'esterno.

Soluzione

Essendo il recipiente ermeticamente chiuso, il suo volume non cambia. Pertanto si tratta di una trasformazione isocora.

$Q = \Delta U = C_V \cdot m \cdot \Delta T =$

$= 0{,}24\ cal/(g \cdot °C) \cdot 1000\ g \cdot (-10)°C = -2400\ cal.$

Esercizio 21 - isobara

2 moli di azoto vengono riscaldate a pressione costante e la loro temperatura passa da -30 °C a + 40 °C. Determinare il lavoro compiuto nella trasformazione. Sapendo poi che il calore specifico molare a volume costante dell'azoto vale 20,6 J/(mol K), determinare il calore totale fornito per il riscaldamento.

Soluzione

$T_1 = -30\ °C = (273{,}15 - 30)\ °K = 243{,}15°K$

$T_2 = +\ 40\ °C = (273{,}15 + 40)\ °K = 313{,}15°K$

$\Delta T = T_2 - T_1 = 313{,}15 - 243{,}13 = 70\ °K.$

Il lavoro compiuto dal gas è $L = p \cdot \Delta V = n \cdot R \cdot \Delta T =$

$$2\ mol \cdot 8{,}314\ \frac{J}{k \cdot mol} \cdot 70\ K = 1164\ J .$$

Essendo $C_{mP} = R + C_{mP} =$

$$= 8{,}314\ \frac{J}{k \cdot mol} + 20{,}6\ \frac{J}{k \cdot mol} = 28{,}914\ \frac{J}{k \cdot mol}$$

Il calore fornito al gas è :

$$Q = C_{mP} \cdot n \cdot \Delta T = 28{,}914\ \frac{J}{K \cdot mol} \cdot 2 \cdot 70\ K = 4048\ J .$$

Esercizio 22 - isobara

3 moli di gas monoatomico [C_{mV} = 12,47 $J/(mole \cdot K)$] sono contenute in un cilindro dotato di stantuffo mobile senza attrito e si trovano in equilibrio con la pressione esterna di 1,5 Atm. Il gas viene riscaldato e il suo volume passa da 40 litri a 60 litri.
Calcolare il lavoro compiuto dal gas, l'aumento della sua temperatura e il calore fornito nel processo.

Soluzione

La trasformazione è una isobara.

Il lavoro compiuto dal gas è:

$L = P \cdot \Delta V = 1{,}5\ Atm \cdot 20\ l = 30\ l \cdot Atm = 30 \cdot 101{,}3\ J =$
$= 3039\ J.$

Dalla formula $L = n \cdot R \cdot \Delta T$ *si calcola:*

$$\Delta T = \frac{L}{n \cdot R} = \frac{3039\ J}{3\ mol \cdot 8{,}314\ J/K \cdot mol} = 121{,}8\ K$$

$C_{mP} = C_{mV} + R = (12{,}47 + 8{,}314) J/(mole \cdot K) =$
$= 20{,}784\ J/(mole \cdot K)$

Il calore fornito nel processo è:

$Q = C_{mP} \cdot n \cdot \Delta T = 20{,}784\ J/(mol \cdot k) \cdot 3\ mol \cdot 121{,}8\ k =$
$= 7594\ J.$

Esercizio 23 - adiabatica

Il γ per un certo gas vale 1,44. Determinare i valori del corrispondente calore specifico a volume e a pressione costante (*espressi entrambi in* $J/(mol \cdot K)$ *).*

Soluzione

Risolvendo il sistema formato dalle due equazioni:

$$\begin{cases} C_{mP} = C_{mV} + R \\ \gamma = \dfrac{C_{mP}}{C_{mV}} \end{cases} \quad si\ ha \quad \begin{cases} C_{mP} = C_{mV} + 8{,}314 \\ \dfrac{C_{mP}}{C_{mV}} = 1{,}44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_{mP} = C_{mV} + 8{,}314 \\ C_{mP} = 1{,}44 \cdot C_{mV} \end{cases} \qquad \begin{cases} 1{,}44 \cdot C_{mV} = C_{mV} + 8{,}314 \\ ------ \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1{,}44 \cdot C_{mV} - C_{mV} = 8{,}314 \\ ------ \end{cases} \qquad \begin{cases} (1{,}44 - 1) \cdot C_{mV} = 8{,}314 \\ ------ \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}44 \cdot C_{mV} = 8{,}314 \\ ------ \end{cases} \qquad \begin{cases} C_{mV} = 18{,}90 \\ ------ \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_{mV} = 18{,}90 \\ C_{mP} = 1{,}44 \cdot 18{,}90 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_{mV} = 18{,}90 \\ C_{mP} = 27{,}21 \end{cases}$$

Esercizio 24 - isoterma

64 g (M = 32) di ossigeno subiscono una trasformazione isoterma nella quale si raddoppia il volume del gas. La temperatura della trasformazione è di 27 °C.
Determinare il lavoro compiuto dal sistema.

Soluzione
Il numero di grammomolecole di ossigeno è:

$n = \frac{m}{M} = \frac{64\ g}{32\ g/mol} = 2\ moli$ *mentre* $V_2 = 2V_1$

Il lavoro compiuto dal sistema è $L = n \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} =$

$= 2\ mol \cdot 8{,}314\ J/mol \cdot K \cdot 300{,}15\ K \cdot \ln \frac{2V_1}{V_1} =$

$= 2\ mol \cdot 8{,}314\ J/mol \cdot K \cdot 300{,}15\ K \cdot \ln 2 = 3459\ J.$

Esercizio 25 - isoterma

In una trasformazione isoterma che si sviluppa a 400 K si compie un lavoro di 10000 J. Le moli del gas che subiscono la trasformazione sono 3 e la pressione iniziale del gas vale 10^5 Pa.
Determinare la pressione del gas al termine della trasformazione.

Soluzione
$T = 400\ K$, $L = 10000\ J$, $n = 3$, $P_1 = 10^5\ Pa$
Dalla legge di Boyle $P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$ *si ha*

$P_2 = P_1 \cdot \frac{V_1}{V_2}$. *Quindi per trovare* P_2 *occorre conoscere*

oltre a $P_1 = 10^5\ Pa$, *anche il rapporto* $\frac{V_1}{V_2}$.

Tale rapporto può essere ricavato dalla formula

$L = n \cdot R \cdot T \cdot \log_e\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

Da questa relazione $\log_e\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \frac{L}{n \cdot R \cdot T} =$

$= \frac{10000\ J}{3\ mol \cdot 8{,}314 \frac{J}{K \cdot mol} \cdot 400\ K} = 1{,}00233$.

Dal risultato ottenuto $\log_e\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 1{,}00233$ *si ottiene,*

calcolando la funzione inversa e^x, $\frac{V_2}{V_1} = 2{,}72$ *da cui*

il rapporto reciproco vale $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2{,}72} = 0{,}367$

Pertanto $P_2 = P_1 \cdot \frac{V_1}{V_2} = 0{,}367 \cdot 10^5\ Pa$

Esercizio 26 - adiabatica

In una trasformazione adiabatica di un gas caratterizzato dal valore γ = 1,66 la pressione si dimezza. Determinare il rapporto tra il volume finale e il volume iniziale.

Soluzione

Sapendo che $P_2 = \frac{1}{2} \cdot P_1$

dalla formula $P_1 \cdot V_1^{\gamma} = P_2 \cdot V_2^{\gamma}$ *si ha:*

$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1,66} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{P_1}{\frac{1}{2}P_1} = 2$ *cioè* $\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1,66} = 2$

applicando il logaritmo ad ambo i membri si ottiene:

$\log\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1,66} = \log 2\ ;\ \ 1{,}66 \cdot \log\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \log 2\ ;$

$\log\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \frac{\log 2}{1{,}66}\ ;\ \ \log\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 0{,}1813\ldots$ *da cui*

calcolando l'antilogaritmo si ottiene: $\frac{V_2}{V_1} = 1{,}52$.

Esercizio 27 - adiabatica

Il una trasformazione adiabatica di un gas caratterizzato dal valore γ = 1,33 il volume diviene doppio. Determinare il rapporto tra la temperatura finale e la temperatura iniziale del gas.

Soluzione
Sapendo che $V_2 = 2 \cdot V_1$ *si ha:*

$T_2 = \frac{P_2 \cdot V_2}{nR} = \frac{P_2 \cdot 2V_1}{nR} = \frac{2 \cdot P_2 \cdot V_1}{nR}$ e $T_1 = \frac{P_1 \cdot V_1}{nR}$

$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{2 \cdot P_2 \cdot V_1}{nR} \cdot \frac{nR}{2 \cdot P_1 \cdot V_1} = \frac{2 \cdot P_2 \cdot V_1}{P_1 \cdot V_1} = 2 \cdot \frac{P_2}{P_1}$

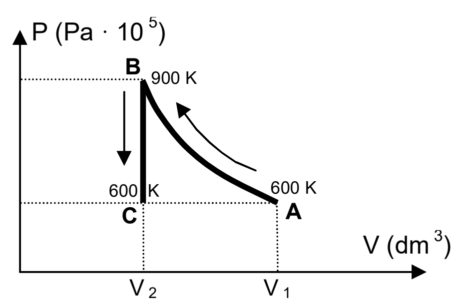
ma $\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = \left(\frac{V_1}{2 \cdot V_1}\right)^{\gamma} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1,33} = 0{,}3978$

Pertanto $\frac{T_2}{T_1} = 2 \cdot \frac{P_2}{P_1} = 2 \cdot 0{,}3978 = 0{,}7956$.

Esercizio 28 - adiabatica + isocora

In una compressione adiabatica di un gas monoatomico ideale la temperatura passa da 600 K a 900 K. Successivamente il gas (una mole) viene raffreddato a volume costante fino a tornare a 600 k. Calcolare la variazione di energia interna e il lavoro totale.

Soluzione



Nella compressione adiabatica $A \rightarrow B$, la variazione di energia interna è data da:

$$\Delta U = C_{mV} \cdot n \cdot \Delta T = \frac{3}{2} \cdot R \cdot n \cdot \Delta T =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 8{,}314\ J/(mol \cdot K) \cdot 1\ mole \cdot (900 - 600)\,K = 3741\ J.$$

mentre il lavoro è dato da L = - ΔU = - 3741 J.

Nella seconda trasformazione B → C (isocora)

$$\Delta U = C_{mV} \cdot n \cdot \Delta T = \frac{3}{2} \cdot R \cdot n \cdot \Delta T =$$

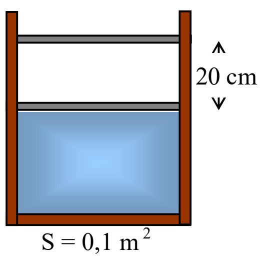
$$= \frac{3}{2} \cdot 8{,}314\ J/(mol \cdot K) \cdot 1\ mole \cdot (600 - 900)\,K = -\ 3741\ J.$$

mentre il lavoro è dato da L = 0.

Pertanto nelle due trasformazioni la variazione di energia interna è stata ΔU = (3741 – 3741) J = 0.
mentre il lavoro totale compiuto è stato -3741 J.

Esercizio 29 - isobara

Un cilindro con area di base 0,1 m^2 contiene due moli di un gas monoatomico alla pressione di $2 \cdot 10^5\ Pa$ in equilibrio con l'ambiente esterno. Al gas viene fornito calore a pressione costante. Sapendo che il pistone che chiude il cilindro si solleva di 20 cm, calcolare il calore fornito al gas e l'aumento di temperatura.



Soluzione
La trasformazione è una isobara.
Essendo il gas inizialmente in equilibrio con l'ambiente esterno, con una pressione interna di $2 \cdot 10^5\ Pa$, vuol dire che la pressione esterna è anch'essa di $2 \cdot 10^5\ Pa$.
Pertanto il gas effettua un lavoro contro la pressione esterna di $2 \cdot 10^5\ Pa$, pari a:

$$L = P \cdot \Delta V = 2 \cdot 10^5\ Pa \cdot 0{,}1\ m^2 \cdot 0{,}2\ m =$$

$$= 2 \cdot 10^5\ Pa \cdot 0{,}02\ m^3 = 4000\ J.$$

Dall'altra formula per il calcolo del lavoro $L = n \cdot R \cdot \Delta T$

Si può calcolare $\Delta T = \frac{L}{n \cdot R} = \frac{4000\ J}{2\ mol \cdot 8{,}314\ J/mol \cdot K} =$

= 240,56 K.
Mentre il calore fornito al gas è:

$$Q = C_{mP} \cdot n \cdot \Delta T = (C_{mV} + R) \cdot n \cdot \Delta T =$$

$$= \left(\frac{3}{2}R + R\right) \cdot n \cdot \Delta T = \frac{5}{2} R \cdot n \cdot \Delta T =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot 8{,}314\ J/(mol \cdot K) \cdot 2 \cdot 240{,}56\ K = 10.000\ J.$$

Esercizio 30 - adiabatica + isoterma

Una mole di gas ideale biatomico [$C_{mV} = 20{,}8\ J/(mol \cdot K)$] viene compressa adiabaticamente, passando dalla temperatura di $T_1 = 300\ K$ alla temperatura di $T_1 = 400\ K$.
Successivamente viene fornita al gas una chilocaloria a temperatura costante.
Calcolare la variazione di energia interna e il lavoro compiuto dal gas nelle due trasformazioni.

Soluzione
Nella prima trasformazione (adiabatica) la variazione di energia interna vale: $\Delta U = C_{mV} \cdot n \cdot \Delta T =$

$$= 20{,}8\ J/(mol \cdot K) \cdot 1\ mole \cdot (400 - 300)\,K = 2080\ J.$$

Mentre il lavoro effettuato è uguale a:
L = - ΔU = - 2080 J.

Nella seconda trasformazione (isoterma) la variazione di energia interna è ΔU = 0, mentre il lavoro effettuato è:

$$L = Q = 1\ Kcal = 1000\ cal = 1000 \cdot 4{,}18\ J = 4180\ J.$$

In definitiva nelle due trasformazioni

$$\Delta U = (2080 + 0)\ J = 2080\ J.$$

$$L = (4180 - 2080)\ J = 2100\ J.$$

Esercizio 31 - adiabatica

Una mole di gas ideale contenuta in un volume V_1 = 20 dm^3 alla temperatura di T_1 = 500 K viene fatta espandere adiabaticamente fino ad avere un volume doppio. Determinare la temperatura e la pressione finale del gas e il lavoro compiuto nell'espansione, nel caso in cui il gas sia monoatomico e biatomico.

Soluzione
Se V_1 = 20 dm^3 allora V_2 = 40 dm^3.

Per un gas monoatomico
Dall'equazione di stato $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$ si ha:

$$P_1 = \frac{n \cdot R \cdot T_1}{V_1} = \frac{1\ mole \cdot 8{,}314\ J/(mol \cdot K) \cdot 500\ K}{0{,}02\ m^3} =$$

$$= 207850\ J/m^3 = 207850\ Pa.$$

Dalla formula $P_1 \cdot V_1^{\gamma} = P_2 \cdot V_2^{\gamma}$ *si ha:*

$$P_2 = P_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right) = 207850\ Pa \cdot \left(\frac{20\ m^3}{40\ m^3}\right)^{1{,}66} = 65772\ Pa.$$

Dall'equazione di stato $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$ si ha:

$$T_2 = \frac{P_2 \cdot V_2}{n \cdot R} = \frac{65772\ Pa \cdot 0{,}04\ m^3}{1\ mole \cdot 8{,}314\ J/(mol \cdot K)} = 316{,}5\ K$$

$$L = -\ C_{mV} \cdot n \cdot \Delta T =$$

$$= -\ 12{,}5\ J/(mol \cdot k) \cdot 1\ mole \cdot (316{,}5 - 500)\,K = +\ 2294\ J.$$

Per un gas biatomico

Dalla formula $P_1 \cdot V_1^{\gamma} = P_2 \cdot V_2^{\gamma}$ *si ha:*

$$P_2 = P_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right) = 207850\ Pa \cdot \left(\frac{20\ m^3}{40\ m^3}\right)^{1{,}40} = 78760\ Pa.$$

$$T_2 = \frac{P_2 \cdot V_2}{n \cdot R} = \frac{78760\ Pa \cdot 0{,}04\ m^3}{1\ mole \cdot 8{,}314\ J/(mol \cdot K)} = 379\ K.$$

$L = -C_{mV} \cdot n \cdot \Delta T =$

$= -20{,}8\ J/(mol \cdot k) \cdot 1\ mole \cdot (379 - 500)\ K = +\ 2517\ J.$

Esercizio 32

Il calore latente di evaporazione dell'acqua a 100 °C e a pressione atmosferica vale 540 cal/g.
Quanto vale la variazione di energia interna di un grammo d'acqua quando questa passa dallo stato liquido allo stato di vapore a 100 °C ?
(Per la densità del vapore a 100 °C e a pressione atmosferica assumere il valore di 6,25 10^{-4} g/cm^3).

<u>Soluzione</u>

La variazione di energia interna è data da $\Delta U = Q - L$.
Il calore fornito Q, è dato dal prodotto della massa d'acqua per il suo calore latente

$$Q = C_L \cdot m = 540\,\frac{cal}{g} \cdot 1\ g = 540\ g = 540 \cdot 4{,}18\ J = 2257\ J.$$

Mentre il lavoro L, consiste nel lavoro di espansione che si ha nel passaggio liquido-aeriforme $L = p \cdot \Delta V$, *in cui*

$$V = \frac{massa}{densità} = \frac{1\ g}{6{,}25 \cdot 10^{-4}\ g/cm^3} = 1600\ cm^3 = 1{,}6\ dm^3$$

$L = p \cdot \Delta V = 1\ Atm \cdot 1{,}6\ litri =$

$= 1{,}6\ l \cdot Atm = 1{,}6 \cdot 101{,}3\ J = 162\ J$

E quindi $\Delta U = Q - L = (2257 - 162)\ J = 2095\ J.$

Esercizio 33 - adiabatica

Un recipiente termicamente isolato con l'esterno contiene un gas sotto pressione. Il gas viene fatto espandere in uno spazio vuoto finché il suo volume diventa doppio. Supponendo nulli gli attriti, determinare:
- il lavoro compiuto dal gas;
- la variazione della sua energia interna;
- la variazione della sua temperatura;
- la variazione della velocità media delle sue molecole;
- la variazione della sua pressione rispetto al valore iniziale.

<u>Soluzione</u>

La La trasformazione è adiabatica.
Poiché il gas viene fatto espandere in uno spazio vuoto, la pressione esterna è zero. Quindi il lavoro compiuto dal gas contro la pressione esterna è

$L = P \cdot \Delta V = 0 \cdot (V_2 - V_1) = 0.$

La variazione della sua energia interna è $\Delta U = -L = 0.$
La variazione della sua temperatura è

$$\Delta T = -\frac{L}{C_{mV} \cdot n} = -\frac{0}{C_{mV} \cdot n} = 0.$$

La variazione della velocità media delle sue molecole, strettamente dipendente dalla temperatura è zero.
La variazione della sua pressione rispetto al valore iniziale si ottiene nel seguente modo.
Essendo $\Delta T = 0$, *vuol dire che* $T_1 = T_2$. *Dall'equazione di stato, applicata alla situazione iniziale e finale, si ottiene:*

$P_2 \cdot V_2 = n \cdot R \cdot T$

$P_1 \cdot V_1 = n \cdot R \cdot T$

sottraendo membro a membro si ha:

$P_2 \cdot V_2 - P_1 \cdot V_1 = n \cdot R \cdot T - n \cdot R \cdot T$, *cioè*

$P_2 \cdot V_2 - P_1 \cdot V_1 = 0,$ *ma* $V_2 = 2 \cdot V_1$ *quindi*

$P_2 \cdot 2 \cdot V_1 - P_1 \cdot V_1 = 0;$ $P_2 \cdot 2 \cdot V_1 - P_1 \cdot V_1 = 0;$

dividendo per V_1 *si ha*

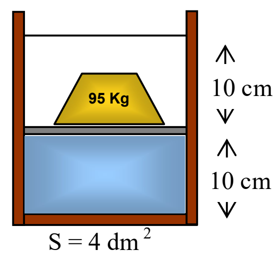
$2 \cdot P_2 = P_1;$ $P_2 = \frac{1}{2} P_1$

Pertanto la variazione della sua pressione rispetto al valore iniziale è

$\Delta T = \cdot P_2 - P_1 = \frac{1}{2} P_1 - P_1 = -\frac{1}{2} P_1$

Esercizio 34 - adiabatica e irreversibile

In figura è rappresentato un cilindro disposto verticalmente, dotato di stantuffo avente massa 5 Kg. Sullo stantuffo è posto un oggetto la cui massa è 95 Kg. Il cilindro e lo stantuffo sono isolanti termici perfetti. Inizialmente il gas si trova alla pressione di 10^6 Pa e alla temperatura di 300 K, mentre lo stantuffo è bloccato a una distanza di 10 cm dalla base del cilindro. Successivamente si sblocca lo stantuffo e lo si lascia sollevare per altri 10 cm.
Determinare la pressione e la temperatura finale del sistema. Il calore specifico del gas a volume costante è di $12{,}5\ J/(K\ mol)$; la pressione esterna vale 10^5 Pa.



<u>Soluzione</u>

La trasformazione è adiabatica e irreversibile $L = -\Delta U$.
Il lavoro è dato dal sollevamento di una massa complessiva m = (5 + 95) Kg = 100 Kg , per un tratto h = 10 cm, contro la pressione atmosferica $P = 10^5$ *Pa, spostando l'aria di un volume pari a* $V = S \cdot h = 4\ dm^3$,

$L = L_1 + L_2$

$L_1 = m \cdot g \cdot h = 100\ Kg \cdot 9{,}8\ m/s^2 \cdot 0{,}1\ m =$

$= 980\ Kg \cdot m/s^2 \cdot 0{,}1\ m = 980\ Newton \cdot 0{,}1\ metri =$

$= 98\ Newton \cdot metri = 98\ Joule.$

$L_2 = PV = 10^5\ Pa \cdot 4\ l = 400000\ Pa \cdot l =$

$= 400000 \cdot 9{,}87 \cdot 10^{-6}\ Atm \cdot l = 3{,}948\ Atm \cdot l =$

$3{,}948 \cdot 101{,}3\ J = 400\ J.$

Quindi $L = L_1 + L_2 = (98 + 400)\ J = 498\ J.$
Pertanto l'energia interna diminuisce di $-\Delta U = L = 498\ J.$
Dalla formula $\Delta U = C_{mV} \cdot n \cdot \Delta T$ *si ricava la variazione della temperatura* $\Delta T = \frac{\Delta U}{n \cdot C_{mV}}$

dove, dall'equazione di stato dei gas $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$

si ricava $n = \frac{P_1 \cdot V_1}{R \cdot T_1} = \frac{10^6\ Pa \cdot 4\ l}{8{,}314\ J/k \cdot mol \cdot 300\ K} =$

$= \frac{4 \cdot 10^6\ Pa \cdot l}{2494{,}2\ J/mol} = \frac{4 \cdot 10^6 \cdot 9{,}87 \cdot 10^{-6}\ Atm \cdot l}{2494{,}2\ J/mol} =$

$= \dfrac{39{,}48\ Atm \cdot l}{2494{,}2\ J/mol} = \dfrac{39{,}48 \cdot 101{,}3\ J}{2494{,}2\ J/mol} = 1{,}6\ mol.$

Ritornando al calcolo della variazione della temperatura

$$\Delta T = \frac{\Delta U}{n \cdot C_{mV}} = \frac{-498\ J}{1{,}6\ mol \cdot 12{,}5\ J/K \cdot mol} = 24{,}9\ K.$$

Il primo risultato è $T_2 = T_1 + \Delta T = (300 - 24{,}9) = 275\ K$.

Per determinare la pressione finale P_2 occorre utilizzare di nuovo l'equazione di stato dei gas $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$

$$P_2 = \frac{n \cdot R \cdot T_2}{V_2} = \frac{1{,}6\ mol \cdot 8{,}314\ J/K \cdot mol \cdot 275\ k}{8\ l} =$$

$$= \frac{3658{,}2\ J}{8\ dm^3} = \frac{3658{,}2\ J}{0{,}008\ m^3} = 457270\ J/m^3 = 457270\ Pa$$

Esercizio 35 - irreversibile

Una bombola di volume incognito, inizialmente chiusa, contiene 2 moli di elio alla temperatura ambiente di 20 °C e alla pressione di 15 Atm. Essa è collegata tramite un sottile capillare a un recipiente a volume variabile e pressione costante, detto gasometro. Si apre la valvola di chiusura e il gas fluisce nel gasometro abbastanza lentamente, in modo che la temperatura del gas sia costantemente uguale a quella ambiente. La pressione che agisce sul gasometro è di un'atmosfera.

Calcolare:

1. il lavoro fatto dal gas e il calore ceduto dall'ambiente durante la trasformazione descritta;
2. il lavoro che si otterrebbe se il gas venisse trasferito in maniera perfettamente reversibile.

Soluzione

La trasformazione è una isoterma irreversibile. Essa consiste nel passaggio del gas dalla bombola (alla pressione di 15 Atm) al gasometro (alla pressione di 1 Atm).

Nel sistema si ha un aumento di volume pari a quello che si avrebbe se, in una trasformazione isoterma, si fosse portata la pressione della bombola a una atmosfera.

Tale aumento avviene però a pressione costante, quella P del gasometro, per cui il lavoro svolto è $L = P \cdot \Delta V$,

dove il volume iniziale $V_1 = \dfrac{n \cdot R \cdot T}{P_1} =$

$$= \frac{2\ mol \cdot 8{,}314\ J/K \cdot mol \cdot 293{,}15\ K}{15\ Atm} =$$

$$= 324{,}97 \frac{J}{Atm} = \frac{324{,}97 \cdot 9{,}87 \cdot 10^{-3}\ l \cdot Atm}{Atm} =$$

$= 3{,}21\ l = 3{,}21\ dm^3.$

Dalla legge dell'isoterma $P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$ si ha

$$V_2 = \frac{P_1 \cdot V_1}{P_2} = \frac{15\ Atm \cdot 3{,}21\ dm^3}{1\ Atm} = 48{,}11\ dm^3.$$

Pertanto $L = P \cdot \Delta V = 1\ Atm \cdot (48{,}11 - 3{,}21)\, dm^3 =$

$= 44{,}90\ Atm \cdot dm^3 = 44{,}90\ Atm \cdot l =$

$= 44{,}90 \cdot 101{,}3\ J = 4548\ J.$

Il lavoro che si otterrebbe se il gas venisse trasferito in maniera perfettamente reversibile è

$$L = n \cdot R \cdot T \cdot \log_e\left(\frac{V_2}{V_1}\right) =$$

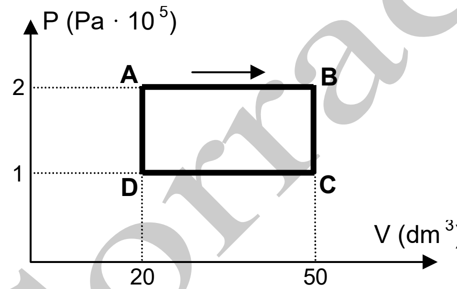
$$= 2\ mol \cdot 8{,}314\ J/K \cdot mol \cdot 293{,}15\ k \cdot \log_e \frac{48{,}11}{3{,}21} =$$

$= 16{,}628\ J \cdot 2{,}71 = 13196\ J.$

Esercizio 36 - ciclo termodinamico

Un gas subisce in sequenza quattro trasformazioni che nel piano PV sono rappresentate da un rettangolo i cui vertici sono caratterizzati dalle seguenti coordinate: $(2 \cdot 10^5\ Pa; 20\ dm^3)$, $(2 \cdot 10^5\ Pa; 50\ dm^3)$, $(1 \cdot 10^5\ Pa; 50\ dm^3)$, $(1 \cdot 10^5\ Pa; 20\ dm^3)$.

Determinare il lavoro compiuto nel ciclo e il calore totale scambiato con l'esterno quando il ciclo è percorso in senso orario.



Soluzione

Il lavoro prodotto dal sistema è dato da:

$L_{TOTALE} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA}$.

$L_{AB} = P \cdot \Delta V = 2 \cdot 10^5\ Pa \cdot (0{,}05 - 0{,}02)\, m^3 = 6000\ J.$

$L_{BC} = 0$ (isocora)

$L_{CD} = P \cdot \Delta V = 1 \cdot 10^5\ Pa \cdot (0{,}02 - 0{,}05)\, m^3 = -3000\ J.$

$L_{DA} = 0$ (isocora)

Pertanto il lavoro compiuto nel ciclo è :

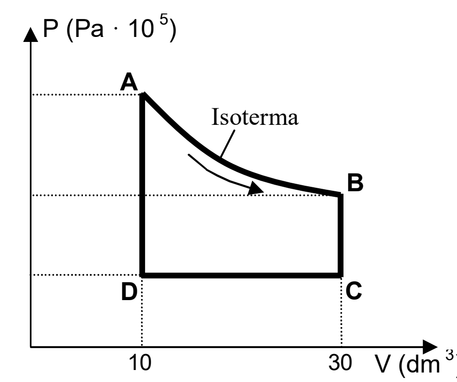
$L_{TOTALE} = (6000 + 0 - 3000 + 0)\ J = 3000\ J.$

Essendo in un ciclo termodinamico $\Delta U = 0$, per il I° principio della Termodinamica $Q = L + \Delta U$, si ha che: $Q = L = 3000\ J$.

Esercizio 37 - ciclo termodinamico

Una mole di gas ideale biatomico esegue le quattro trasformazioni AB, BC, CD, DA indicate in figura.

L'isoterma si sviluppa a 600 K. Il volume $V_A = 10\ dm^3$ e il volume $V_B = 30\ dm^3$. La temperatura $T_C = 500$ K. Determinare Q, L, ΔU in ciascuna trasformazione.



Soluzione

Nella trasformazione isoterma AB si ha ΔU = 0.

Q = L = $n \cdot R \cdot T \cdot log \frac{V_2}{V_1}$ =

= $1\, mol \cdot 8,314\, J/(mol \cdot K) \cdot 600\, K \cdot log \frac{0,03}{0,01}$ =

= 5480 J .

Nella trasformazione isocora BC si ha L = 0.

Q = ΔU = $C_{mV} \cdot n \cdot \Delta T$ = $\frac{5}{2} R \cdot n \cdot (T_C - T_B)$ =

= $\frac{5}{2} 8,314\, J/(k \cdot mol) \cdot 1\, mol \cdot (500 - 600) K$ =

= 2079 J .

Nella trasformazione isobara CD si ha:

P_C = $\frac{n \cdot R \cdot T_C}{V_C}$ = $\frac{1 \cdot 8,314 \cdot 500}{0,03}$ = *138567 Pa .*

L = $P \cdot \Delta V$ = $138567 \cdot (0,01 - 0,03)$ *= - 2771 J .*

Dalla relazione $\frac{V_C}{T_C} = \frac{V_D}{T_D}$ *si ricava:*

$T_D = T_C \frac{V_D}{V_C}$ = $500 \cdot \frac{0,01}{0,03}$ *= 167 K .*

$\Delta U = C_{mV} \cdot n \cdot \Delta T$ = $\frac{5}{2} R \cdot n \cdot (T_D - T_C)$ =

= $\frac{5}{2} 8,314 \cdot 1 \cdot (167 - 500)$ *= - 6921 J .*

$Q = C_{mP} \cdot n \cdot \Delta T$ = $\frac{7}{2} R \cdot n \cdot (T_D - T_C)$ =

= $\frac{7}{2} 8,314 \cdot 1 \cdot (167 - 500)$ *= - 9690 J .*

Nella trasformazione isocora DA si ha L = 0.

Q = ΔU = $C_{mV} \cdot n \cdot \Delta T$ = $\frac{5}{2} R \cdot n \cdot (T_A - T_D)$ =

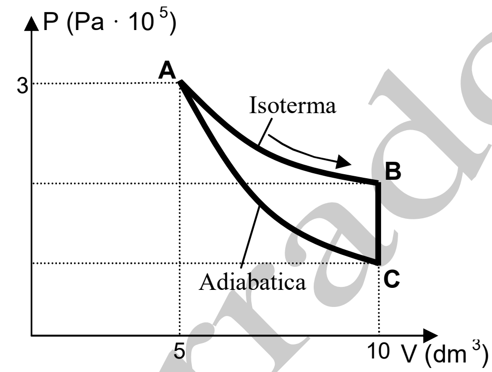
= $\frac{5}{2} 8,314\, J/(k \cdot mol) \cdot 1\, mol \cdot (600 - 167) K$ =

= 9000 J .

Esercizio 38 - ciclo termodinamico

Una mole di gas monoatomico ideale [$C_{mV} = 12,47\, J/(mol \cdot K)$] esegue le tre trasformazioni AB, BC, CA indicate in figura. Esse sono caratterizzate dai seguenti parametri: $V_A = 5\, dm^3$, $P_A = 3 \cdot 10^5\ Pa$, $V_B = 10\, dm^3$.

Determinare Q, L, ΔU in ciascuna trasformazione.



Soluzione

Nella trasformazione isoterma AB si ha ΔU *= 0.*

T_A = $\frac{P_A \cdot V_A}{n \cdot R}$ = $\frac{3 \cdot 10^5 \cdot 0,005}{1 \cdot 8,314}$ *= 180,4 K*

Dalla relazione $P_A \cdot V_A = P_B \cdot V_B$ *si ha:*

$P_B = \frac{P_A \cdot V_A}{V_B}$ = $\frac{3 \cdot 10^5 \cdot 0,005}{0,01}$ *= 150000 Pa .*

Q = L = $n \cdot R \cdot T \cdot log \frac{V_B}{V_A}$ =

= $1\, mol \cdot 8,314\, J/(mol \cdot K) \cdot 180,4\, K \cdot log \frac{0,01}{0,005}$ =

= 1040 J .

Dalla relazione $P_1 \cdot V_1^\gamma = P_2 \cdot V_2^\gamma$ *applicata alla trasformazione adiabatica CA si ha:*

$P_C = P_A \cdot \left(\frac{V_A}{V_C} \right)^\gamma$ = $3 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{0,005}{0,01} \right)^\gamma$ = *94932 Pa .*

Dalla relazione $\frac{P_B}{T_B} = \frac{P_C}{T_C}$ *applicata alla trasformazione isocora BC si ha:*

$T_C = \frac{T_B \cdot P_C}{P_B}$ = $\frac{180,4 \cdot 94932}{150000}$ = *114,2 K .*

Nella trasformazione isocora BC si ha: L = 0.

Q = ΔU = $C_{mV} \cdot n \cdot \Delta T$ = $\frac{5}{2} R \cdot n \cdot (T_C - T_B)$ =

= $12,47\, J/(k \cdot mol) \cdot 1\, mol \cdot (114,2 - 180,4) K$ *= -826J*

Nella trasformazione adiabatica CA si ha: Q = 0.

L = $- C_{mV} \cdot .n \cdot \Delta T$ =

= $-12,47\, J/(k \cdot mol) \cdot 1\, mol \cdot (180,4 - 114,2) K$ =

= -826 *J .* ΔU *= - L = 826 J .*

II° Principio della Termodinamica

Enunciato di Clausius ⟹ È impossibile trasferire spontaneamente calore da una sorgente fredda ad una sorgente calda

⟺

Enunciato di Kelvin ⟹ È impossibile compiere lavoro ciclicamente estraendo calore da una sola sorgente

⟹ Il rendimento di ogni ciclo reversibile, che scambia calore fra due identiche sorgenti di temperatura T_2 e T_1 è identico

Rendimento di una macchina

Una macchina termica operante fra due sorgenti di calore Q_1 e Q_2 (con $Q_1 < Q_2$) è un congegno che assorbe dalla sorgente calda una quantità di calore Q_2 e cede alla sorgente più fredda una quantità di calore Q_1 realizzando un lavoro $L = Q_2 - Q_1$.

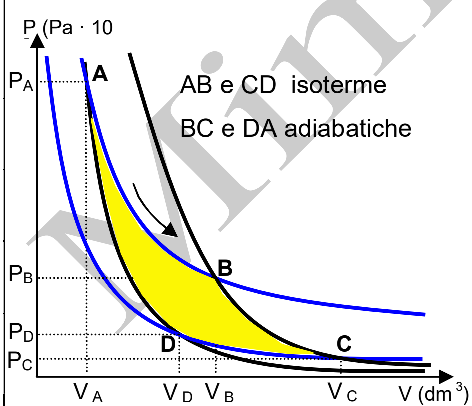
$$\eta = \frac{L}{Q_2} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Q_2 = Calore assorbito

$$L = Q_2 - Q_1 \qquad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Q_1 = Calore ceduto

Ciclo di Carnot



Trasformazione AB	Trasformazione BC	Trasformazione CD	Trasformazione DA
Isoterma	Adiabatica	Isoterma	Adiabatica
T_2 = Costante	Diminuzione di temperatura da T_2 a T_1	T_1 = Costante	Aumento di temperatura da T_1 a T_2
Calore assorbito Q_2	Q = 0	Calore ceduto Q_1	Q = 0
Diminuzione di pressione	Diminuzione di pressione	Aumento di pressione	Aumento di pressione
Aumento di volume	Aumento di volume	Diminuzione di volume	Diminuzione di volume
Lavoro di espansione	Lavoro di espansione	Lavoro di compressione	Lavoro di compressione
$\Delta U = 0$	Diminuzione della energia interna U	$\Delta U = 0$	Aumento della energia interna U

Premessa

Nella tecnica la trasformazione di energia termica in energia meccanica viene effettuata adoperando soprattutto fluidi: riscaldando infatti un fluido, esso si espande compiendo lavoro verso l'esterno a spese del calore sottratto alla sorgente.
Evidentemente, per ottenere un lavoro continuativo, è necessario ricorrere ad un dispositivo che possa ritornare periodicamente nelle stesse condizioni di partenza, che lavori cioè mediante una successione di operazioni cicliche.
In pratica per riportare il sistema nelle condizioni iniziali, basta comprimere il fluido sottraendo il calore di compressione mediante il contatto diretto con una sorgente a temperatura inferiore alla prima. Questa seconda sorgente (generalmente l'ambiente esterno) è detta refrigerante.
Usufruendo quindi di due sorgenti a diversa temperatura, mediante un processo ciclico che consenta il trasferimento di una parte del calore da quella a temperatura maggiore a quella a temperatura minore, si può produrre energia e compiere un lavoro nel senso meccanico della parola.
Essendo inoltre, per ogni ciclo, la variazione di energia interna nulla ($\Delta U = 0$), per il I° principio della termodinamica ($Q = L + \Delta U$), discende che il lavoro $L = \sum Q$, dove $\sum Q$ rappresenta la somma algebrica delle quantità di calore scambiate dal sistema termodinamico con le sorgenti.
Indicando con Q_2 il calore sottratto dal fluido alla sorgente a temperatura maggiore T_2 e con Q_1 quello ceduto al refrigerante a temperatura T_1, il lavoro $L = Q_2 - Q_1$.

Il ciclo di Carnot è un ciclo reversibile nel quale il sistema scambia calore con due termostati a temperatura T_2 e T_1, realizzando un lavoro L.
Il ciclo di Carnot è un ciclo ideale, sia perché esso è compiuto da un fluido ideale (gas perfetto), sia perché in esso si trascurano tutti i possibili attriti, sia perché si suppone che le trasformazioni del fluido siano reversibili (cioè che avvengono attraverso una successione di stati di equilibrio del sistema; ove per stato di equilibrio del sistema si intende quella particolare condizione nella quale tutto il sistema è caratterizzato dai medesimi valori della pressione del volume e della temperatura).

Descrizione del ciclo

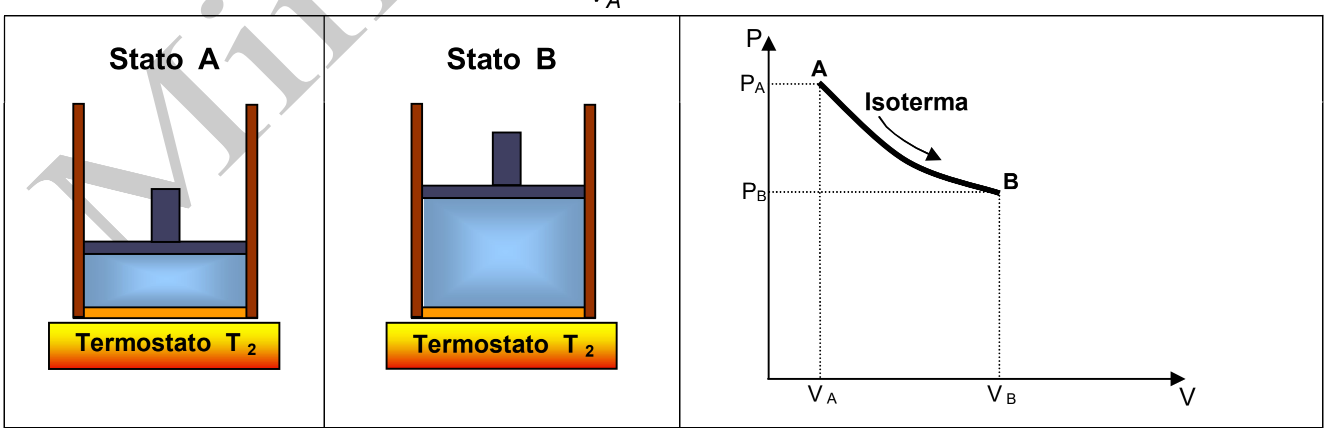
Il ciclo viene eseguito da un gas perfetto contenuto in un cilindro munito di pistone scorrevole senza attrito. Il cilindro ha la base termicamente conduttrice, mentre la parete laterale e il pistone sono perfettamente isolanti.

Il ciclo si compone di quattro fasi:

<u>I^a FASE - Isoterma</u>

Il cilindro viene posto su di un termostato funzionante a temperatura costante T_2, il quale fornisce al cilindro una quantità di calore Q_2 che fa espandere lentamente il fluido contenuto nel cilindro sollevandone il pistone.
Poiché la variazione di energia interna è nulla ($\Delta U = 0$), in quanto la trasformazione avviene alla temperatura costante T_2, il lavoro positivo L_2 compiuto dal sistema sull'ambiente esterno è uguale, per il I° principio della termodinamica ($Q = L + \Delta U$), alla quantità di calore Q_2 che il sistema assorbe dal termostato a temperatura T_2 .

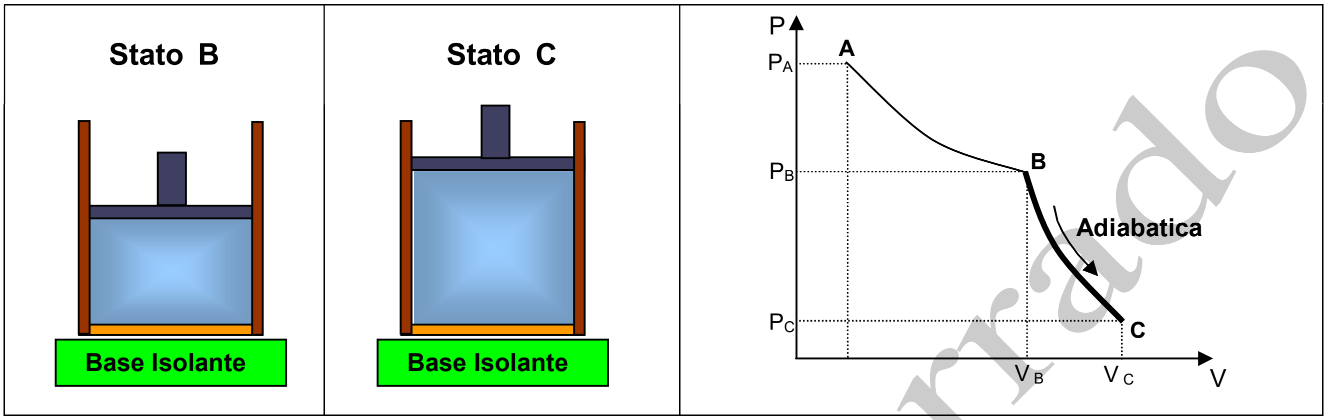
In simboli $Q_2 = L_2$ e cioè $Q_2 = L_2 = n \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln \frac{V_B}{V_A}$.



II^a FASE - Adiabatica

Il cilindro viene posto su di una base isolante. Il gas, anche privo di un rifornimento di calore dall'esterno, continua ad espandersi lentamente sollevando il pistone di un altro piccolo tratto.
Essendo il sistema isolato termicamente (Q = 0), Il lavoro positivo di espansione, per il I° principio della termodinamica ($Q = L + \Delta U$), viene fatto soltanto a spese di una parte dell'energia interna del fluido che, quindi si raffredda passando dalla temperatura T_2 alla temperatura T_1. In simboli $L = -\Delta U$.

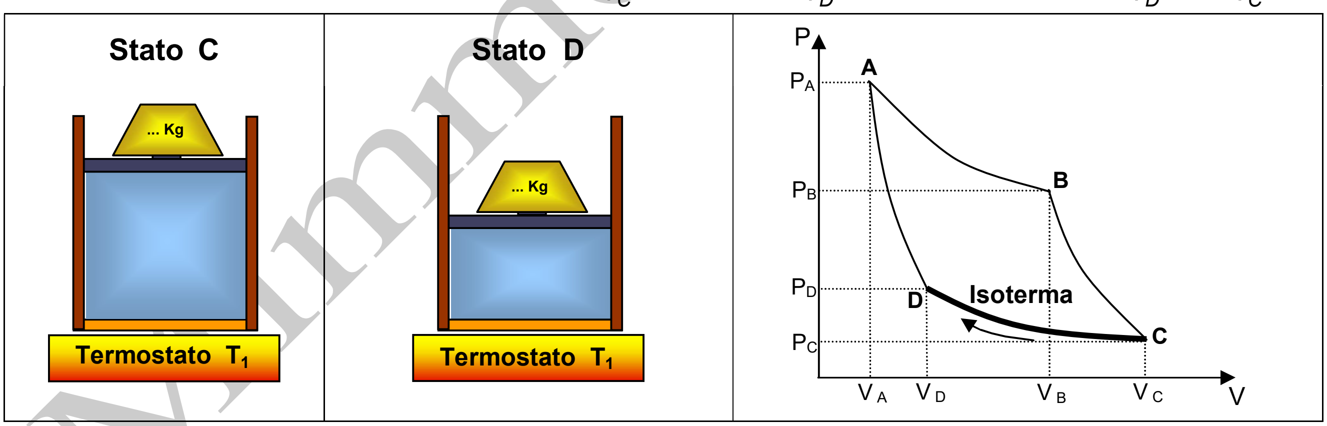
Essendo BC una trasformazione adiabatica vale la formula $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$ che in questo caso diventa $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma-1}$.



III^a FASE - Isoterma

Il cilindro viene compresso lentamente fino allo stato D, dove l'isoterma CD incontra l'adiabatica AD. Il lavoro negativo fatto sul sistema dovrebbe trasformarsi in un aumento dell'energia interna del fluido con conseguente innalzamento della sua temperatura. Per evitare quest'aumento di temperatura, poiché si vuole realizzare una trasformazione isoterma, si pone il cilindro su di un termostato funzionante a temperatura costante T_1 che assorbe l'energia prodotta dalla compressione.
Poiché la variazione di energia interna è nulla ($\Delta U = 0$), in quanto la trasformazione avviene alla temperatura costante T_1, il lavoro negativo L_1 compiuto dall'esterno sul sistema è uguale, per il I° principio della termodinamica ($Q = L + \Delta U$), alla quantità di calore Q_1 che il sistema cede al termostato a temperatura T_1.

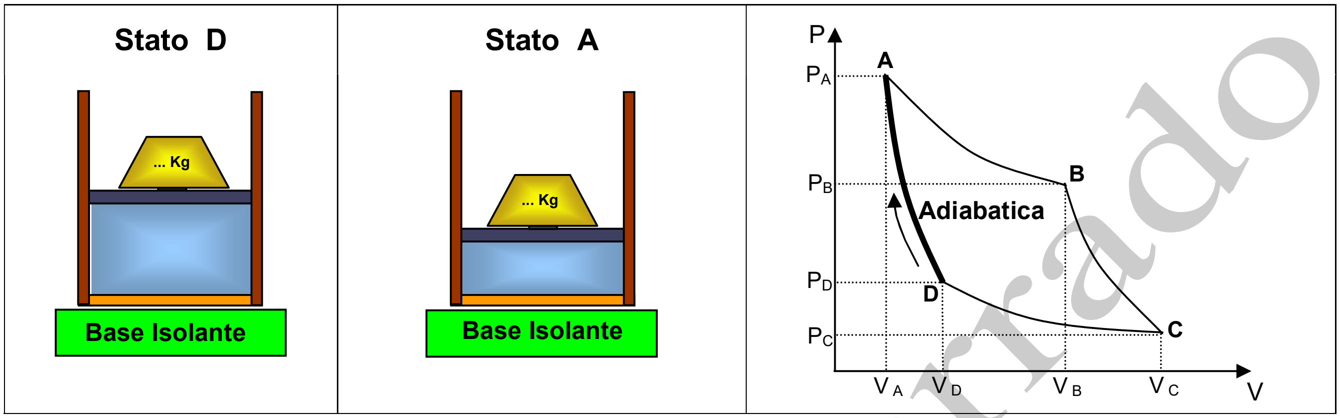
In simboli $Q_1 = L_1$ e cioè $L_1 = Q_1 = -n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln\frac{V_D}{V_C} = n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln\frac{V_C}{V_D}$ (poiché $\ln\frac{V_C}{V_D} = -\ln\frac{V_D}{V_C}$)



IV[a] FASE - Adiabatica

Con l'ultima fase si ritorna alle condizioni iniziali di pressione, volume e temperatura. Il cilindro viene posto su di una base isolante, e viene ancora compresso lentamente, fino a raggiungere il volume iniziale V_A.
Essendo il sistema isolato termicamente (Q = 0), Il lavoro negativo compiuto dall'esterno sul sistema, per il I° principio della termodinamica ($Q = L + \Delta U$), fa aumentare l'energia interna del fluido che, quindi si riscalda passando dalla temperatura T_1 alla temperatura T_2. In simboli il lavoro $L = - \Delta U$.

Essendo DA una trasformazione adiabatica vale la formula $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$ che in questo caso diventa $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_D}{V_A}\right)^{\gamma-1}$.



Rendimento del ciclo

Dal confronto delle due formule delle trasformazioni adiabatiche BC e AD: $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma-1}$ e $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_D}{V_A}\right)^{\gamma-1}$

si ha: $\frac{V_C}{V_B} = \frac{V_D}{V_A}$ od anche $\frac{V_C}{V_D} = \frac{V_B}{V_A}$.

Mentre dividendo membro a membro le due formule delle trasformazioni isoterme AB e CD:

$Q_1 = n \cdot R \cdot T_1 \cdot ln\frac{V_C}{V_D}$ e $Q_2 = n \cdot R \cdot T_2 \cdot ln\frac{V_B}{V_A}$ si ottiene:

$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1 \cdot \frac{V_C}{V_D}}{T_2 \cdot \frac{V_B}{V_A}}$ da cui si ottiene $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$ poiché $\frac{V_C}{V_D} = \frac{V_B}{V_A}$.

Pertanto il rendimento di una macchina termica si può calcolare, oltre che con la formula $\eta = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}$ anche con

$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$, la quale permette di calcolare il rendimento della macchina conoscendo solo le due temperature assolute T_1 e T_2 fra le quali opera il sistema.

Il ciclo di Carnot, come detto all'inizio deve essere considerato un modello verso il quale ogni macchina termica reale deve avvicinarsi. Se si indica con η_C il rendimento di una macchina di Carnot operante fra le due temperature T_2 e T_1 e con η_Q il rendimento di una qualsiasi macchina termica che lavori fra le stesse temperature T_2 e T_1 , sui ha che $\eta_C > \eta_Q$.

Il tutto viene riassunto dal seguente ***Teorema di Carnot :***

Tutte le macchine reversibili che lavorano fra due termostati hanno lo stesso rendimento e nessun altra macchina reale che operi fra gli stessi termostati può avere un rendimento maggiore.

Esempio 1

In ciclo di Carnot, le due isoterme vengono eseguite alla temperature di T_1 = 1200 K e T_2 = 1800 K. Sapendo che il ciclo viene effettuato da una mole di gas monoatomico, con volumi V_A = 20 dm ^{3} e V_B = 40 dm ^{3}, calcolare la pressione e il volume nei punti B, C, D del ciclo. Determinare inoltre il rendimento del ciclo mediante il calcolo del lavoro prodotto dal sistema e del calore ceduto a esso dalla sorgente a temperatura maggiore.

<u>Soluzione</u>

I volumi in A e in B sono noti. Le pressioni in A e in B si calcolano con l'equazione di stato:

$$P_A = \frac{n \cdot R \cdot T_A}{V_A} = \frac{1 \cdot 8{,}314 \cdot 1800}{0{,}02} = 748260 \text{ Pa.}$$

$$P_B = \frac{n \cdot R \cdot T_B}{V_B} = \frac{1 \cdot 8{,}314 \cdot 1800}{0{,}04} = 374130 \text{ Pa.}$$

Per calcolare la pressione in C occorre ragionare nel seguente modo:

Nella formula $P_B \cdot V_B^{\gamma} = P_C \cdot V_C^{\gamma}$; *sostituendo*

$$V_B = \frac{n \cdot R \cdot T_B}{V_B} \quad \text{e} \quad V_C = \frac{n \cdot R \cdot T_C}{V_C} \quad \text{si ha:}$$

$$P_B \cdot \left(\frac{n \cdot R \cdot T_B}{P_B} \right)^{\gamma} = P_C \cdot \left(\frac{n \cdot R \cdot T_C}{P_C} \right)^{\gamma} ;$$

$$P_B \cdot \frac{T_B{}^{\gamma}}{P_B{}^{\gamma}} = P_C \cdot \frac{T_C{}^{\gamma}}{P_C{}^{\gamma}} ; \quad P_B{}^{1-\gamma} \cdot T_B{}^{\gamma} = P_C{}^{1-\gamma} \cdot T_C{}^{\gamma} ;$$

elevando ambo i membri a $\frac{1}{1-\gamma}$ *si ha:*

$$\left(P_B{}^{1-\gamma} \cdot T_B{}^{\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} = \left(P_C{}^{1-\gamma} \cdot T_C{}^{\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad \text{e cioè}$$

$$P_B . T_B{}^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = P_C . T_C{}^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \quad \text{per cui}$$

$$P_C . = P_B . \left(\frac{T_B}{T_C} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = 374130 \cdot \left(\frac{1800}{1200} \right)^{\frac{1{,}66}{1-1{,}66}} =$$

$$= 374130 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^{-\frac{1{,}66}{0{,}66}} = 374130 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1{,}66}{0{,}66}} = 134936 \text{ Pa.}$$

Per calcolare la pressione in D si applica la formula trovata prima:

$$P_D = P_A . \left(\frac{T_A}{T_D} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = 748260 \cdot \left(\frac{1800}{1200} \right)^{\frac{1{,}66}{1-1{,}66}} =$$

$$748260 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^{-\frac{1{,}66}{0{,}66}} = 748260 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1{,}66}{0{,}66}} = 269871 \text{ Pa.}$$

Per calcolare il volume in C applichiamo l'equazione di stato:

$$V_C = \frac{n \cdot R \cdot T_C}{P_C} = \frac{1 \cdot 8{,}314 \cdot 1200}{134936} = 0{,}074 \text{ m}^3.$$

Per calcolare il volume in D applichiamo l'equazione di stato:

$$V_D = \frac{n \cdot R \cdot T_D}{P_D} = \frac{1 \cdot 8{,}314 \cdot 1200}{269871} = 0{,}037 \text{ m}^3.$$

Per determinare inoltre il rendimento del ciclo, calcoliamo il lavoro prodotto dal sistema e il calore ceduto a esso dalla sorgente a temperatura maggiore.
La quantità di calore Q_2 che viene fornito al sistema è quella che interviene nella isoterma AB.
Essendo nella isoterma AB $\Delta U = 0$, si ha che il calore fornito al sistema è:

$$Q_2 = L_{AB} = n \cdot R \cdot T_2 \cdot \log \left(\frac{V_B}{V_A} \right) =$$

$$1 \cdot 8{,}314 \cdot 1800 \cdot \log \left(\frac{0{,}04}{0{,}02} \right) = 10373 \text{ J .}$$

Il lavoro prodotto dal sistema è dato da:

$$L_{TOTALE} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} .$$

$$L_{AB} = Q_2 = 10373 \text{ J}$$

$$L_{BC} = -\Delta U_{BC} = -n \cdot C_{mV} \cdot (T_1 - T_2) =$$

$$= -1 \cdot \frac{3}{2} R (1200 - 1800) = 7483 \text{ J.}$$

$$L_{CD} = n \cdot R \cdot T_1 \cdot \log \left(\frac{V_D}{V_C} \right) =$$

$$= 1 \cdot 8{,}314 \cdot 1200 \cdot \log \left(\frac{0{,}037}{0{,}074} \right) = -6915 \text{ J.}$$

$$L_{DA} = -\Delta U_{DA} = -n \cdot C_{mV} \cdot (T_2 - T_1) =$$

$$= -1 \cdot \frac{3}{2} R (1800 - 1200) = -7483 \text{ J.}$$

In definitiva:

$$L_{TOTALE} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} =$$

= 10373 + 7483 – 6915 – 7483 = 10373 – 6915 = 3458 J

Il rendimento del ciclo è $\eta = \frac{L}{Q_2} = \frac{3458}{10373} = 0{,}333$.

Il rendimento del ciclo si poteva calcolare anche con la formula:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{1200}{1800} = 0{,}333 .$$

Esempio 2

Un frigorifero opera secondo il ciclo di Carnot percorso in senso inverso. All'interno della cella frigorifera la temperatura è di 10 °C, mentre la temperatura della sorgente calda è di 40 °C.
Determinare il coefficiente di prestazione del frigorifero.
Determinare il lavoro che si deve impiegare per raffreddare 20 Kg di acqua da 40 °C a 15 °C.

Soluzione
Il coefficiente di prestazione del frigorifero è:

CP = $\frac{T_1}{T_2 - T_1} = \frac{283{,}15}{313{,}15 - 283{,}15}$ *= 9,44 .*

Dalla formula del coefficiente di prestazione

CP = $\frac{Q_1}{L}$ *; si ricava che:* $L = \frac{Q_1}{CP}$ *.*

Essendo $Q_1 = C_{H_2O} \cdot m \cdot \Delta T$ *=*

= $1\ cal/(g\,°C) \cdot 20 \cdot 10^3\, g \cdot 25\,°C$ *=*

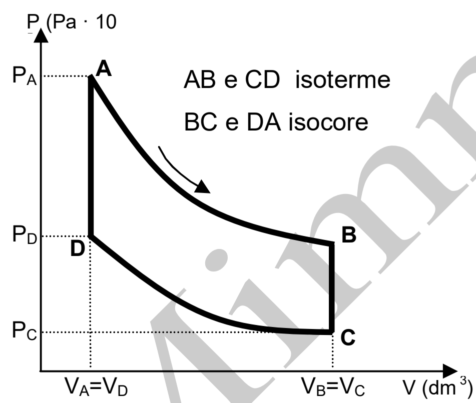
= $5 \cdot 10^5$ *Cal =* $5 \cdot 10^5 \cdot 4{,}18\ J$ *=* $20{,}9 \cdot 10^5$ *J.*

Pertanto $L = \frac{Q_1}{CP} = \frac{20{,}9 \cdot 10^5\ J}{9{,}44} = 2{,}214 \cdot 10^5$ *J.*

Esempio 3 - ciclo di Stirling

Tre moli di un gas monoatomico effettuano il ciclo di Stirling rappresentato in figura.

Sapendo che: $T_A = 400\ k$, $V_A = 15\ dm^3$, $T_D = 200\ k$, $V_B = 45\ dm^3$, calcolare il rendimento del ciclo.



Soluzione
Il lavoro prodotto dal sistema è dato da:

$L_{TOTALE} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA}$ *.*

L_{BC} *= 0 (isocora),* L_{DA} *= 0 (isocora)*

$L_{AB} = n \cdot R \cdot T_A \cdot log\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$ *=*

= $3 \cdot 8{,}314 \cdot 400 \cdot log\left(\frac{0{,}045}{0{,}015}\right)$ *= 10960 J .*

$L_{CD} = n \cdot R \cdot T_D \cdot log\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$ *=*

= $3 \cdot 8{,}314 \cdot 200 \cdot log\left(\frac{0{,}015}{0{,}045}\right)$ *= - 5480 J .*

Pertanto $L_{TOTALE} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA}$ *=*
= (10960 + 0 – 5480 + 0) = 5480 J .

Il calore ceduto al sistema è Q_{AB} *+* Q_{DA}
con Q_{DA} *= -*Q_{BC} *.*

Pertanto Il calore ceduto al sistema è
$Q_2 = Q_{AB} + Q_{DA} - Q_{BC} = Q_{AB} = L_{AB}$ *= 10960 J .*

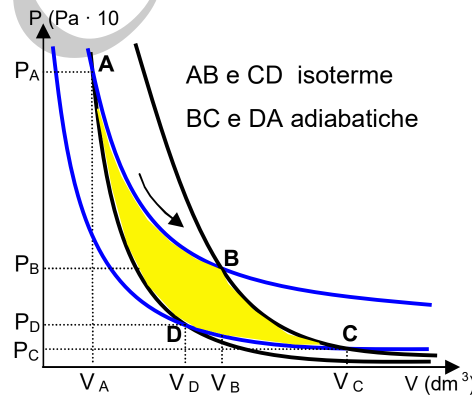
Il rendimento del ciclo è $\eta = \frac{L}{Q_2} = \frac{5480}{10960}$ *= 0,5 .*

Il rendimento del ciclo si poteva calcolare anche con la formula:

$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{200}{400}$ *= 0,5 .*

Esercizio 1 (pag.157) **- ciclo di Carnot**

In un ciclo di Carnot le due isoterme vengono eseguite alla temperatura di 500 K e 300 K, rispettivamente. Durante la fase di espansione vengono forniti 4000 J di energia termica. Determinare il lavoro compiuto nel ciclo e il calore ceduto alla sorgente a temperatura inferiore.



Soluzione
Dopo aver calcolato il rendimento della macchina

$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{300}{500}$ *= 0,4 .*

Si calcola il lavoro compiuto in un ciclo:
L = $Q_2 \cdot \eta = 4000 \cdot 0{,}4$ *= 1600 J .*

Dalla formula $L = Q_2 - Q_1$ *si ha:*

$Q_1 = Q_2 - L$ *= 4000 – 1600 = 2400 J .*

Esercizio 2 - ciclo di Carnot

Una macchina termica esegue un ciclo di Carnot tra due sorgenti di calore che si trovano alla temperatura di 300 K e 500 K rispettivamente. In ciascun ciclo la macchina cede 100 Kcal alla sorgente fredda. Determinare quanto calore assorbe dalla sorgente calda e quanto lavoro (misurato in Kcal) compie in ciascun ciclo.

<u>Soluzione</u>

Dalla relazione $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$ *si trova la quantità di calore che assorbe dalla sorgente calda:*

$$Q_2 = Q_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} = 100\ kcal \cdot \frac{500\ K}{300\ K} = 166{,}7\ Kcal\ .$$

Il lavoro è $L = Q_2 - Q_1$ = *(166,7 – 100) Kcal = 66,7 Kcal*

Esercizio 3 - ciclo di Carnot

Una macchina termica che opera reversibilmente tra due soli sorgenti riceve, in un ciclo, una quantità di calore di 50 Kcal dalla sorgente calda e scarica alla sorgente fredda una quantità di calore di 20 Kcal. Determinare la temperatura della sorgente calda sapendo che quella della sorgente fredda vale 273 K .

<u>Soluzione</u>

Dalla relazione $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$ *si trova la temperatura della sorgente calda:*

$$T_2 = T_1 \cdot \frac{Q_2}{Q_1} = 273\ k \cdot \frac{50\ Kcal}{20\ Kcal} = 682{,}5\ K\ .$$

Esercizio 4 - ciclo di Carnot

Un ciclo di Carnot opera fra due temperature T_2 = 400 K e T_1 = 300 K e compie ad ogni ciclo un lavoro di 41800 J. Calcolare il rendimento del ciclo e il calore in esso disperso, per ciascun ciclo, al termostato alla temperatura T_1 .

<u>Soluzione</u>

Il rendimento è $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{300\ K}{400\ K} = 0{,}25$.

Per calcolare il calore disperso nel ciclo occorre risolvere il sistema:

$$\begin{cases} L = Q_2 - Q_1 \\ \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \end{cases} \quad \begin{cases} 41800 = Q_2 - Q_1 \\ \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{300}{400} \end{cases} \quad \begin{cases} Q_2 - Q_1 = 41800 \\ Q_1 = \frac{3}{4} \cdot Q_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_2 - \frac{3}{4} \cdot Q_2 = 41800 \\ --- \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot Q_2 = 41800 \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_2 = 167200 \\ --- \end{cases} \quad \begin{cases} Q_2 = 167200 \\ Q_1 = \frac{3}{4} \cdot Q_2 = \frac{3}{4} \cdot 167200 = 125400 \end{cases}$$

Esercizio 5 - ciclo di Carnot

Il rendimento di un ciclo di Carnot vale 0,4. Determinare la temperatura T_2 della sorgente calda sapendo che la sorgente fredda ha la temperatura di 20 ° C.

<u>Soluzione</u>

Dalla formula $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$ *si ha che :*

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 - \eta\ ; \qquad T_1 = (1 - \eta) \cdot T_2\ ; \qquad T_2 = \frac{T_1}{(1 - \eta)}$$

Essendo T_2 *= (20 + 273) K = 293 K si ha :*

$$T_2 = \frac{T_1}{(1 - \eta)} = \frac{293\ K}{(1 - 0{,}4)} = 488\ K.$$

Esercizio 6 - ciclo di Carnot

In un ciclo di Carnot vengono fornite 4 Kilocalorie alla temperatura T_2 = 600 K. Sapendo che a ogni ciclo viene compiuto un lavoro di 8000 J, calcolare il rendimento e la temperatura di raffreddamento.

<u>Soluzione</u>

Dalla formula $L = Q_2 - Q_1$ *si ha :*

$$Q_1 = Q_2 - L = 4\ Kcal - 8000\ J =$$
$$= 4000 \cdot 4{,}18\ J - 8000\ J =$$
$$= 16720\ J - 8000\ J = 8720\ J\ .$$

Il rendimento è : $\eta = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{8720\ J}{16720\ J} = 0{,}478$.

Dalla formula $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$ *si ha :*

$$T_1 = \frac{Q_1 \cdot T_2}{Q_2} = \frac{8720\ J \cdot 600\ K}{16720\ J} = 313\ K\ .$$

Esercizio 7 - ciclo di Carnot

Due cicli di Carnot sono connessi in modo che il calore ceduto dal primo venga utilizzato completamente per alimentare il secondo. Il primo il ciclo opera tra le temperature T_2 = 800 K e T_1 = 600 K, il secondo ciclo opera tra le temperature T_2^I = 600 K e T_1^I = 300 K . Sapendo che al primo ciclo vengono fornite 10 4 Kcal, calcolare il lavoro totale prodotto dal sistema dei due cicli e il suo rendimento complessivo spiegando perché esso si possa determinare direttamente con i dati forniti.

<u>Soluzione</u>

Nel primo ciclo $Q_2 = 10^4$ *Kcal , pertanto*

$$Q_1 = Q_2 \frac{T_1}{T_2} = 10^4\ kcal\ \frac{600\ K}{800\ K} = 7500\ Kcal$$

Nel secondo ciclo Q_2^I *= 7500 Kcal .*

Pertanto

$$Q_1^I = Q_2^I \bullet \frac{T_1^I}{T_2^I} = 7500\,kcal \bullet \frac{300\ K}{600\ K} = 3750\ \ Kcal$$

Nel I° ciclo il lavoro è

$L = Q_2 \quad Q_1 = 10000 – 7500 = 2500\ J$

Nel II° ciclo il lavoro è

$L^I = Q_2^I \quad Q_1^I = Q_1 \quad Q_1^I = 7500 – 3750 = 3750\ J$

Il lavoro totale è $L_{TOT} = L + L^I = 2500 + 3750 = 6250\ J$.

Il rendimento è $\eta = \frac{L_{TOT}}{Q_2} = \frac{6250}{10000} = 0{,}625$.

Il rendimento poteva anche essere calcolato direttamente con la formula $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = \frac{6250}{10000} = 0{,}625$

Esercizio 8 - ciclo di Carnot

In un ciclo frigorifero di Carnot il lavoro da compiere per sottrarre 4 kcal alla sorgente che si trova alla temperatura inferiore di T_1 = -13° C, vale 3000 J.

Calcolare il valore della temperatura esterna del frigorifero e il calore ceduto all'esterno a ogni ciclo.

<u>Soluzione</u>

$Q_1 = 4\ kcal = 4000 \bullet 4{,}18\ J = 16720\ J$.

Dalla formula $L = Q_2 - Q_1$ *si ottiene il calore ceduto :*

$Q_2 = Q_1 + L = (16720 + 3000)\ J = 19720\ J$.

Dalla formula $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$ *si ottiene :*

$$T_2 = \frac{Q_2 \quad T_1}{Q_1} = \frac{19720\ J \bullet 260{,}15\ K}{16720\ J} = 306{,}83\ K =$$

$= (306{,}83 – 273{,}15)\ °C = 33{,}7\ °C$.

Esercizio 9 - ciclo di Carnot

Si vuole utilizzare un ciclo di Carnot funzionante alla rovescia per estrarre, in un'ora, 1000 kcal da un ambiente a temperatura costante di –20 °C e trasferirlo a un altro ambiente a temperatura costante di +20 °C.
Determinare la potenza che si deve impegnare per far funzionare la macchina termica.

<u>Soluzione</u>

$T_1 = (273 – 20)\ K = 253\ K.$

$T_2 = (273 + 20)\ K = 293\ K.$

$Q_1 = 1000\ kcal = 1000000 \bullet 4{,}18\ J = 4.180.000\ J$.

Dalla formula $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$ *si ottiene :*

$$Q_2 = \frac{Q_1 \bullet T_2}{T_1} = \frac{4180000 \bullet 293}{253} = 4.840.870\ J .$$

Il lavoro necessario è

$L = Q_2 - Q_1 = (4.840.870 – 4.180.000)\ J = 660.870\ J$.

Dovendo questo lavoro essere effettuato in 1 ora, che equivale a 3600 secondi, si ha che la potenza è :

$$P = \frac{Lavoro}{tempo} = \frac{660870\ J}{3600\ s} = 184\ J/s = 184\ W .$$

Esercizio 10 - ciclo di Carnot

Quando in una macchina termica si usa come fluido il vapor d'acqua, le temperature T_1 e T_2 alle quali avviene lo scambio di calore si possono considerare, rispettivamente, la temperatura ambiente (circa 20 °C) e la temperatura del vapore. Calcolare il rendimento teorico della macchina nel caso in cui il vapore possiede come temperatura massima quella corrispondente al suo stato di ebollizione a pressione ordinaria (100° C). In un motore a vapore reale si riesce, con particolari accorgimenti, a elevare la temperatura del fluido che scambia calore fino a 500 °C. Calcolare il rendimento teorico in questo caso.

<u>Soluzione</u>

$T_1 = (273 + 20)\ K = 293\ K.$

$T_2 = (273 + 100)\ K = 373\ K.$

$T_2^I = (273 + 500)\ K = 773\ K.$

Nel I° caso è $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{293}{373} = 0{,}21.$

Nel II° caso è $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2^I} = 1 - \frac{293}{773} = 0{,}62$.

Esercizio 11 - ciclo di Carnot

Una macchina termica a vapore ha rendimento pari al 3%. Il vapore viene immesso nella macchina a 130 °C e viene espulso a 110 °C. Quale percentuale di energia viene perduta rispetto a quella che potrebbe essere teoricamente utilizzata se il ciclo eseguito dalla macchina fosse perfettamente reversibile ?

<u>Soluzione</u>

$T_2 = (273 + 130)\ K = 403\ K.$

$T_1 = (273 + 110)\ K = 383\ K.$

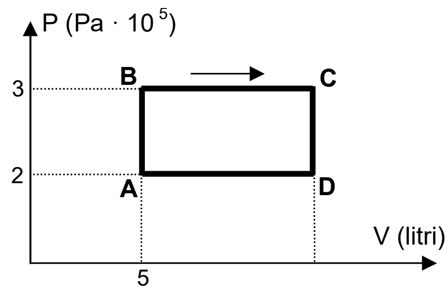
$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{383}{403} = 0{,}0496 = 4{,}96\ \%$.

La percentuale di energia perduta è (4,96 – 3) = 1,96%

Esercizio 12 - ciclo

Una mole di gas monoatomico compie un ciclo che in un piano P, V è rappresentato da un rettangolo con i lati paralleli agli assi. Il lavoro compiuto in un ciclo vale $4000\ J$. Sapendo che la pressione inferiore del ciclo vale $P_1 = 2 \cdot 10^5\ Pa$, la pressione superiore $P_2 = 3 \cdot 10^5\ Pa$ e il volume inferiore del ciclo vale $V_1 = 5\ l$, calcolare il rendimento del ciclo e il suo volume massimo.

Soluzione



Il lavoro compiuto in un ciclo rappresenta l'area del rettangolo. Pertanto la base del rettangolo:

$$\Delta V = DC = \frac{Area}{Altezza} = \frac{Lavoro}{\Delta p} = \frac{4000\,J}{1 \cdot 10^5\,Pa} =$$

$$= \frac{4000 \cdot 1 Pa \cdot m^3}{1 \cdot 10^5\,Pa} = 4 \cdot 10^{-2}\,m^3 = 40\ dm^3 = 40\ l\,.$$

Quindi: $V_C = V_B = V_D + \Delta V = (40+5)\ l = 45\ l\,.$

Per calcolare il rendimento occorre calcolare il calore fornito nella trasformazione isocora AB e il calore fornito nella trasformazione isobara BC.
Per eseguire questi calcoli occorre determinare le temperature nei punti A, B e C:
Applicando l'equazione di stato dei gas perfetti:
$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ *si ottiene:*

$$T_A = \frac{p_A \cdot V_A}{n \cdot R} = \frac{2 \cdot 10^5\,Pa \cdot 5\ l}{1\ mol \cdot 8{,}314\,J/(k \cdot mol)} =$$

$$= \frac{2 \cdot 10^5\ J/m^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3}\,m^3}{1\ mol \cdot 8{,}314\,J/(k \cdot mol)} = 120{,}3\ k\,.$$

$$T_B = \frac{p_B \cdot V_B}{n \cdot R} = \frac{3 \cdot 10^5\,Pa \cdot 5\ l}{1\ mol \cdot 8{,}314\,J/(k \cdot mol)} =$$

$$= \frac{3 \cdot 10^5\ J/m^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3}\,m^3}{1\ mol \cdot 8{,}314\,J/(k \cdot mol)} = 180{,}4\ k\,.$$

$$T_C = \frac{p_C \cdot V_C}{n \cdot R} = \frac{3 \cdot 10^5\,Pa \cdot 45\ l}{1\ mol \cdot 8{,}314\,J/(k \cdot mol)} =$$

$$= \frac{3 \cdot 10^5\ J/m^3 \cdot 45 \cdot 10^{-3}\,m^3}{1\ mol \cdot 8{,}314\,J/(k \cdot mol)} = 1623{,}8\ k\,.$$

Il calore fornito nella trasformazione isocora AB è:

$$Q_{AB} = C_{mV} \cdot n \cdot (T_B - T_A) = \frac{3}{2} R \cdot n \cdot (T_B - T_A) =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 8{,}314\,J/(k \cdot mol) \cdot 1\ mol \cdot (180{,}4 - 120{,}3)\ k =$$

$$= 749{,}5\ J$$

Essendo $C_{mP} = C_{mV} + R = \frac{3}{2}R + R = \frac{5}{2}R$

Il calore fornito nella trasformazione isobara BC è:

$$Q_{BC} = C_{mP} \cdot n \cdot (T_C - T_B) = \frac{5}{2} R \cdot n \cdot (T_C - T_B) =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot 8{,}314\,J/(k \cdot mol) \cdot 1\ mol \cdot (1623{,}8 - 180{,}4)\ k =$$

$$= 30.000{,}1\ J\,.$$

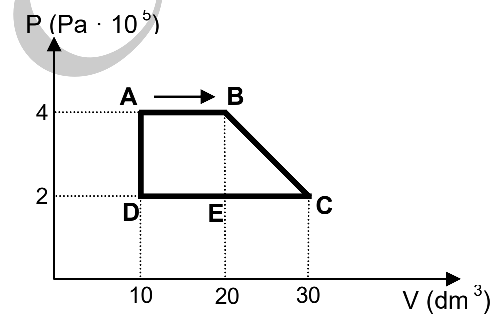
Da cui si ottiene il calore totale fornito:
$Q_{TOT} = Q_{AB} + Q_{BC} = (749{,}5 + 30.000{,}1)\ J = 30.750\ J\,.$

Concludendo il rendimento del ciclo è:

$$\eta = \frac{L}{Q} = \frac{4000\ J}{30750\ J} = 0{,}13\,.$$

Esercizio 13 - ciclo

Il ciclo ABCD di forma trapezoidale, indicato in figura, è caratterizzato dalle coordinate sotto indicate. Il ciclo viene percorso in senso orario.
Determinare il lavoro totale compiuto dal ciclo.
Calcolare inoltre il calore totale scambiato dal sistema e il rendimento del ciclo supponendo che il fluido che evolve nella macchina termica sia costituito da due moli di un gas il cui calore specifico a volume costante vale 20 J/(mol k).



Soluzione

Il calcolo del lavoro è uguale all'area del trapezio ABCD

$$L = \frac{CD + AB}{2} \cdot AD = \frac{(20+10) \cdot 10^{-3}\,m}{2} \cdot 2 \cdot 10^5\,Pa =$$

$$= 3000\ m^3 \cdot Pa = 3000\ J\,.$$

Il calore totale scambiato è dato dalla somma algebrica dei calori ricevuti e ceduti dal sistema nelle quattro trasformazioni. Per determinare tali valori occorre conoscere le temperature in corrispondenza dei quattro stati A, B, C, D.
Dalla formula dei gas perfetti $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$ *si ha:*

$$T_A = \frac{P_A \cdot V_A}{n \cdot R} = \frac{4 \cdot 10^5\,Pa \cdot 10 \cdot 10^{-3}\,m^3}{2\ mol \cdot 8{,}314\ J/(mol\ K)} = 240{,}6\ K$$

$$T_B = \frac{P_B \cdot V_B}{n \cdot R} = \frac{4 \cdot 10^5\,Pa \cdot 20 \cdot 10^{-3}\,m^3}{2\ mol \cdot 8{,}314\ J/(mol\ K)} = 481{,}1\ K$$

$$T_C = \frac{P_C \cdot V_C}{n \cdot R} = \frac{2 \cdot 10^5\,Pa \cdot 30 \cdot 10^{-3}\,m^3}{2\ mol \cdot 8{,}314\ J/(mol\ K)} = 360{,}8\ K$$

$$T_D = \frac{P_D \cdot V_D}{n \cdot R} = \frac{2 \cdot 10^5\, Pa \cdot 10 \cdot 10^{-3}\, m^3}{2\ mol \cdot 8{,}314\ J/(mol\ K)} = 120{,}3\ K$$

Essendo $C_{mP} = C_{mV} + R =$

$= 20\ J/(mol\ k) + 8{,}314\ J/(mol\ k) = 28{,}314\ J/(mol\ k)$,

nella trasformazione isobara AB, si ha:

$Q_{AB} = C_{mP} \cdot n \cdot (T_B - T_A) =$

$= 28{,}314\ J/(mol\ k) \cdot 2mol \cdot (481{,}1 - 240{,}6)\ K = 13619\ J$

nella trasformazione isobara CD, si ha:

$Q_{CD} = C_{mP} \cdot n \cdot (T_D - T_C) =$

$= 28{,}314\ J/(mol\ k) \cdot 2mol \cdot (120{,}3 - 360{,}8)\ K = -13619\ J$

nella trasformazione isocora DA, si ha:

$Q_{DA} = C_{mV} \cdot n \cdot (T_A - T_D) =$

$= 20{,}314\ J/(mol\ k) \cdot 2mol \cdot (240{,}6 - 120{,}3)\ K = 4812\ J$

La trasformazione BC si calcola applicando il I principio della termodinamica:

$Q_{BC} = \Delta U_{BC} + L_{BC} =$

$= C_{mV} \cdot n \cdot (T_C - T_B) + \dfrac{P_B + P_C}{2} \cdot CE =$

$20\ J/(mol\ K) \cdot 2mol \cdot (360{,}8 - 481{,}1)K + \dfrac{(4+2) \cdot 10^5\ Pa}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-3}\ m$

$= (-4812 + 3000)\ J = -1812\ J$.

Il calore totale scambiato è pertanto:

$Q_{TOT} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA} =$

$= (13619 - 1812 - 13619 + 4812)\ J = 3000\ J$.

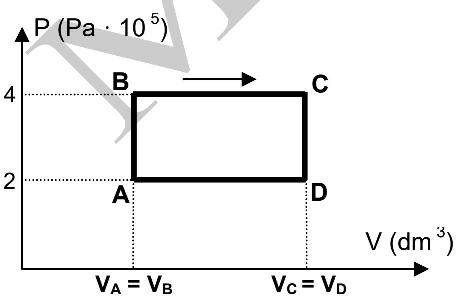
Infine il rendimento del ciclo è:

$$\eta = \frac{L\ \ Totale}{calore\ fornito} = \frac{3000\ J}{Q_{AB} + Q_{DA}} =$$

$$\frac{3000\ J}{(13619 + 4812)\ J} = 0{,}16\ .$$

Esercizio 14 - ciclo

In un ciclo, che nel piano PV è rappresentato da un rettangolo con i lati paralleli agli assi, una mole di gas biatomico, inizialmente a $2 \cdot 10^5\, Pa$, viene riscaldata a volume costante da $T_1 = 200$ K a $T_2 = 400$ K. Successivamente il gas si espande a pressione costante assorbendo 2 Kcal e, infine, al gas viene fatto completare il ciclo rettangolare. Calcolare il rendimento del ciclo.



Soluzione

Nella trasformazione AB : $L_{AB} = 0$ *(isocora)*

$Q_{AB} = \Delta U_{AB} = C_{mV} \cdot n \cdot \Delta T = C_{mV} \cdot n \cdot (T_2 - T_1) =$

$= 20{,}8 \cdot 1 \cdot (400 - 200) = 4160\ J$.

$$V_A = \frac{n \cdot R \cdot T_A}{P_A} = \frac{1 \cdot 8{,}314 \cdot 200}{2 \cdot 10^5} = 0{,}008314\ m^3\ .$$

$V_B = V_A = 0{,}008314\ m^3$.

$$P_B = \frac{n \cdot R \cdot T_B}{V_B} = \frac{1 \cdot 8{,}314 \cdot 400}{0{,}008314} = 4 \cdot 10^5\ Pa$$

$P_C = P_B = 4 \cdot 10^5\ Pa$

Nella trasformazione BC : P = costante.

$Q_{BC} = 2\ kcal = 2000\ cal = 2000 \cdot 4{,}18\ J = 8360\ J$.

$$\Delta T = T_C - T_B = \frac{Q_{BC}}{n \cdot C_{mP}} = \frac{8360\ J}{1\ mol \cdot 29\ J/(mol \cdot K)} = 288\ K$$

Pertanto $T_C = \Delta T + T_B = (288 + 400)\ K = 688\ K$.

$$V_C = \frac{n \cdot R \cdot T_C}{P_C} = \frac{1 \cdot 8{,}314 \cdot 688}{4 \cdot 10^5} = 0{,}0143\ m^3\ .$$

$V_D = V_C = 0{,}0143\ m^3$.

$L_{BC} = P_B \cdot \Delta V = P_B \cdot (V_C - V_B) =$

$4 \cdot 10^5\ Pa \cdot (0{,}0143 - 0{,}008314)\, m^3 = 2394\ J$.

Nella trasformazione CD : $L_{CD} = 0$ *(isocora)*

Nella trasformazione DA : P = costante.

$L_{DA} = P_A \cdot \Delta V = P_A \cdot (V_A - V_D) =$

$= 2 \cdot 10^5\ Pa \cdot (0{,}008314 - 0{,}0143)\, m^3 = -1197\ J.$

Il lavoro prodotto dal sistema è dato da:

$L_{TOTALE} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} =$

$= 0 + 2394 + 0 - 1197 = 1197\ J$.

Il rendimento del ciclo è dato da:

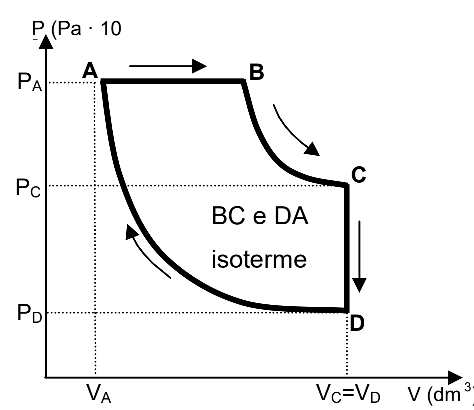
$$\eta = \frac{L_{TOT}}{Q_{AB} + Q_{BC}} = \frac{1197}{4160 + 8360} = 0{,}096\ .$$

Esercizio 15 - ciclo termico

Si consideri il ciclo termico di un gas ideale avente $C_{MV} = 12{,}5\ J/(mol\ \ K)$, rappresentato in figura. I parametri che caratterizzano lo stato A del sistema sono:

$V_A = 10\ dm^3$, $P_A = 3 \cdot 10^5\ Pa$, $T_A = 300$ K ; l'isoterma BC viene eseguita a 500 K e $V_C = 30\ dm^3$.

Determinare i valori di P e V in corrispondenza degli stati B, C, D, il lavoro compiuto nel ciclo e il calore a esso fornito nelle fasi AB e BC.



Soluzione

Nell'isobara AB , $P_B = P_A = 3 \cdot 10^5\, Pa$

Dalla relazione $\dfrac{V_A}{T_A} = \dfrac{V_B}{T_B}$ si ha :

$$V_B = \frac{V_A \cdot T_B}{T_A} = \frac{0{,}01\, m^3 \cdot 500\, K}{300\, K} = 0{,}0166667\, m^3.$$

Nell'isoterma BC, dalla relazione $P_B \cdot V_B = P_C \cdot V_C$

$$\text{si ha: } P_C = \frac{P_B \cdot V_B}{V_C} = \frac{3 \cdot 10^5\, Pa \cdot 0{,}0167\, m^3}{0{,}03\, m^3} =$$

$= 166667\, Pa$.

Nell'isocora CD , $V_D = V_C = 0{,}03\, m^3$.

Nell'isoterma DA, dalla relazione $P_D \cdot V_D = P_A \cdot V_A$

$$\text{si ha: } P_D = \frac{P_A \cdot V_A}{V_D} = \frac{3 \cdot 10^5\, Pa \cdot 0{,}01\, m^3}{0{,}03\, m^3} =$$

$=10^5\, Pa$.

Il lavoro compiuto nel ciclo è :

$$L_{TOTALE} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA}\ .$$

$$L_{AB} = P_A \cdot (V_B - V_A) =$$

$$= 3 \cdot 10^5\, Pa \cdot (0{,}0167 - 0{,}01) m^3 = 2010\, J\ .$$

Dalla relazione $L = n \cdot R \cdot \Delta T$ si calcola il numero dei moli:

$$n = \frac{L_{AB}}{R \cdot (T_B - T_A)} = \frac{2010\, J}{8{,}314\, J/(mol \cdot K) \cdot (500 - 300) K} =$$

$= 1{,}2088\, mol.$

$$L_{BC} = n \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_C}{V_B} =$$

$$= 1{,}2088 \cdot 8{,}314 \cdot 500\, K \cdot \ln \frac{0{,}03}{0{,}0167} = 2943\, J.$$

$$L_{CD} = 0\ .$$

$$L_{DA} = n \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_A}{V_D} = 1{,}2088 \cdot 8{,}314 \cdot 300 \cdot \ln \frac{0{,}01}{0{,}03} =$$

$= -\,3312\, J$.

$L_{TOTALE} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} =$

$= (2010 + 2943 + 0 - 3312)\, J = 1641\, J$.

$$Q_{AB} = C_{mP} \cdot n \cdot (T_B - T_A) = 20{,}8 \cdot 1{,}2088 \cdot (500 - 300) =$$

$= 5029\, J.$

$Q_{BC} = L_{BC} = 2943\, J$.