Errori di misura
Teoria

La misura

L'operazione di misura di una grandezza fisica, anche se eseguita con uno strumento precisissimo e con tecniche e procedimenti accurati, è sempre affetta da errori. Gli errori che si commettono sono essenzialmente di due tipi: *errori* accidentali ed *errori sistematici.*

- Errori accidentali

  Gli errori accidentali, o casuali sono errori dovuti a cause difficilmente individuabili, di solito dovuti a piccole variazioni delle condizioni dell'ambiente oppure alla abilità dello sperimentatore.
  Essi sono simmetrici, cioè nella ripetizione della stessa misura, possono essere sia per difetto sia per eccesso. Questi errori non sono eliminabili.
  Esempio: nella misura di un tavolo, non si riesce a far coincidere in maniera precisa lo spigolo del tavolo con la tacca $0\,cm$ del metro).

- Errori sistematici

  Gli errori sistematici sono errori dovuti a difetti degli strumenti di misura o a metodi errati di misura. Essi sono asimmetrici, cioè nella ripetizione della stessa misura, sono sempre per difetto o sempre per eccesso. Questi errori, in linea di principio, sono eliminabili (*ad esempio effettuando la taratura degli strumenti*).
  Esempi: l'errore commesso da un orologio che va avanti di un minuto ogni ora; l'errore commesso nella lettura della velocità di un'automobile da una persona seduta a destra dell'autista.

Errore assoluto o errore massimo

La misura di una grandezza fisica fornisce un suo valore approssimato, espresso nella forma: $\boxed{x = M \pm \Delta M}$

Se la misura è eseguita con uno strumento a bassa sensibilità, la ripetizione della misura, nelle stesse condizioni, fornisce sempre lo stesso valore M *(il valore centrale fra le due tacche)*. In questo caso ΔM è dato dalla semiampiezza dell'intervallo minimo misurabile *(sensibilità dello strumento)*.

Se la misura è eseguita con uno strumento ad alta sensibilità, la ripetizione della misura, nelle stesse condizioni, fornisce valori diversi. In questo caso M rappresenta la media aritmetica delle misure e ΔM rappresenta la stima dell'errore.

La stima dell'errore può essere dato:

- dalla semidispersione: $\boxed{\Delta M = d = \dfrac{x_{max} - x_{min}}{2}}$ *(detto anche errore massimo)*
- dallo scarto quadratico medio o deviazione standard: $\boxed{\Delta M = \sigma = \sqrt{\dfrac{\sum (x_i - M)^2}{n-1}}}$ *(detto errore statistico)*

  Se il numero di misure ripetute n è molto grande, il termine n-1 può essere sostituito da n, e come errore massimo può essere assunto il valore $\Delta M = 3\sigma$

Errore relativo ed errore percentuale

Le seguenti tre misure: $x_1 = (23,5 \pm 0,5)\,m$ $\quad x_2 = (10,4 \pm 0,5)\,m$ $\quad x_3 = (5,3 \pm 0,5)\,m$ hanno tutte lo stesso errore assoluto $\Delta M = 0,5\,m$. Ma appare chiaro che un errore di $0,5\,m$ su una misura di $5,3\,g$ è più grave di un errore di $0,5\,m$ su una di $23,5\,m$. Per evidenziare questa differenza si introduce l'errore relativo.

L'errore relativo è il rapporto fra l'errore assoluto ΔM e il valore medio M della misura *(n° adimensionale)*. Esso indica il grado di precisione di una misura *(più piccolo è tale valore, minore è l'errore).*

In simboli: $\boxed{e_r = \dfrac{\Delta M}{M}}$.

Nei tre esempi: $e_{r_1} = \dfrac{0,5}{23,5} = 0,02$, $e_{r_2} = \dfrac{0,5}{10,4} = 0,05$, $\quad e_{r_3} = \dfrac{0,5}{5,3} = 0,09$

L'errore percentuale è dato dal prodotto dell'errore relativo per 100. In simboli: $\boxed{\eta = 100 \cdot e_r\,\%}$.

Modalità di scrittura di una misura

Per scrivere correttamente una misura affetta da errore occorre utilizzare le seguenti indicazioni:

- La misura deve contenere lo stesso numero di cifre decimali dell'errore.
  Esempi: $(5,852 \pm 0,001)\,m$ *è una scrittura corretta.*
  $(5,8527 \pm 0,001)\,m$ *non è una scrittura corretta.* $\quad (5,85 \pm 0,001)\,m$ *non è una scrittura corretta.*
- In generale, non essendo possibile conoscere l'errore con un elevato numero di cifre, è buona norma scriverlo con al massimo due cifre decimali.
  Esempio: anziché scrivere $(5,852739 \pm 0,000001)\,m$, è più corretto scrivere $(5,85 \pm 0,01)\,m$.

Osservazione
Quando si effettuano i calcoli occorre utilizzare tutte le cifre decimali che la calcolatrice può memorizzare, ed effettuare l'approssimazione solo al risultato finale.

Propagazione degli errori

Quando si calcola la misura di una grandezza fisica derivata, si effettuano operazioni matematiche sui valori misurati di altre grandezze fisiche fondamentali. Ma essendo queste affette da errori, il risultato finale di tale calcolo è ovviamente anch'esso affetto da errore.

Per valutare l'errore finale del risultato si adotta il ***criterio del massimo errore***.

Propagazione degli errori nell'addizione e sottrazione

Siano dati due segmenti che misurano, rispettivamente: $L_1 = (32,5 \pm 0,2)\,cm$ e $L_2 = (54,7 \pm 0,3)\,cm$.
La misura della somma dei due segmenti $S = L_1 + L_2$ è calcolata nel seguente modo:
Poiché $L_1 = (32,5 \pm 0,2)\,cm$ può variare da $32,3\,cm$ a $32,7\,cm$
e $\quad L_2 = (54,7 \pm 0,3)\,cm$ può variare da $54,4\,cm$ a $55\,cm$

La loro somma $S = L_1 + L_2$ può variare tra un minimo di $86,7$ e un massimo di $87,7$.

Pertanto l'errore massimo (assoluto) che si commette è $\Delta S = \dfrac{x_{max} - x_{min}}{2} = \dfrac{87,7\,cm - 86,7\,cm}{2} = 0,5\,cm$.

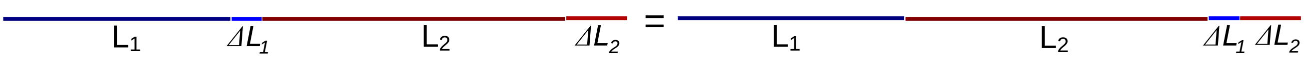
Essendo il valore centrale della misura: $S = \dfrac{L_{max} + L_{min}}{2} = \dfrac{87,7\,cm + 86,7\,cm}{2} = 87,2\,cm$

Pertanto la misura della somma dei due segmenti $S = L_1 + L_2 = (87,2 \pm 0,5)\,cm$.

Si dimostra con un semplice grafico che:

- *Nelle operazioni di addizione e sottrazione si sommano gli errori assoluti*

$\boxed{S = (L_1 + L_2) \pm (\Delta L_1 + \Delta L_2)}$ $\quad$ e $\quad$ $\boxed{D = (L_1 - L_2) \pm (\Delta L_1 + \Delta L_2)}$



Propagazione degli errori nella moltiplicazione e divisione

Si consideri un rettangolo i cui lati misurini, rispettivamente: $L_1 = (64{,}7 \pm 0{,}6)\,cm$ e $L_2 = (29{,}2 \pm 0{,}3)\,cm$.
La misura dell'area del rettangolo $P = L_1 \cdot L_2$ è calcolato nel seguente modo:

$$P = L_1 \cdot L_2 = \begin{cases} (64{,}7 + 0{,}6)\cdot(29{,}2 + 0{,}3)\,cm^2 = 65{,}3 \cdot 29{,}5\,cm^2 = 1926{,}35\,cm^2 & \text{valore massimo} \\ (64{,}7 - 0{,}6)\cdot(29{,}2 - 0{,}3)\,cm^2 = 64{,}1 \cdot 28{,}9\,cm^2 = 1852{,}49\,cm^2 & \text{valore minimo} \end{cases}$$

Da cui l'errore massimo (o errore assoluto) del prodotto è:

$$\Delta P = \frac{x_{max} - x_{min}}{2} = \frac{1926{,}35\,cm - 1852{,}49\,cm}{2} = 36{,}93\,cm$$

Mentre il valore medio è: $\Delta P = \dfrac{x_{max} + x_{min}}{2} = \dfrac{1926{,}35\,cm + 1852{,}49\,cm}{2} = 1889{,}42\,cm$

In definitiva la misura dell'area è data da: $P = L_1 \cdot L_2 = (1889{,}42 \pm 36{,}93)\,cm^2$.

Inoltre non ha senso tenere più cifre decimali di quelle contenute negli errori di misura dei lati del rettangolo Pertanto $P = L_1 \cdot L_2 = (1889{,}4 \pm 36{,}9)\,cm^2$.

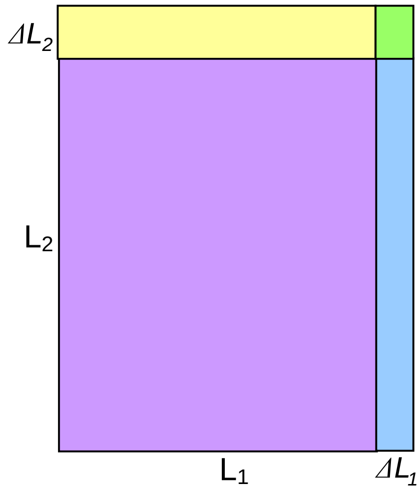
Si dimostra con un semplice grafico che:

- *Nelle operazioni di moltiplicazione e divisione si sommano gli errori relativi*

$$\boxed{P = (L_1 \cdot L_2) \pm \left(\frac{\Delta L_1}{L_1} + \frac{\Delta L_2}{L_2}\right)} \quad \text{e} \quad \boxed{Q = \left(\frac{L_1}{L_2}\right) \pm \left(\frac{\Delta L_1}{L_1} + \frac{\Delta L_2}{L_2}\right)}$$

<u>Dimostrazione della moltiplicazione</u>

Il valore massimo della misura dell'area è dato da:



P_{Max} = *rettangolo viola + rett. azzurro + rett. giallo + rett. verde*

$P_{Max} = L_1 \cdot L_2 + \Delta L_1 \cdot L_2 + L_1 \cdot \Delta L_2 + \Delta L_1 \cdot \Delta L_2$

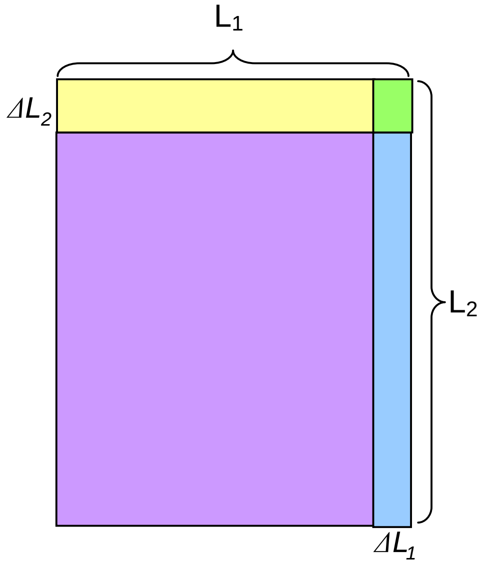
Trascurando l'area del rettangolo verde $\Delta L_1 \cdot \Delta L_2$, in quanto molto più piccolo degli altri, si ha che l'errore positivo nel calcolo del prodotto è: $\Delta P = \Delta L_1 \cdot L_2 + L_1 \cdot \Delta L_2$.

Dividendo ambo i membri per $P = L_1 \cdot L_2$ si ha:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta L_1 \cdot L_2}{L_1 \cdot L_2} + \frac{L_1 \cdot \Delta L_2}{L_1 \cdot L_2} \quad \text{semplificando} \quad \frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta L_1}{L_1} + \frac{\Delta L_2}{L_2} \quad \text{cioè}$$

$e_r = e_{r_1} + e_{r_2}$.

Il valore minimo della misura dell'area è dato da:



P_{min} = *rettangolo grande - rett. azzurro - rett. giallo - rett. verde*

$P_{min} = L_1 \cdot L_2 - (\Delta L_1 \cdot L_2 + L_1 \cdot \Delta L_2 + \Delta L_1 \cdot \Delta L_2)$

Trascurando l'area del rettangolo verde $\Delta L_1 \cdot \Delta L_2$, in quanto molto più piccolo degli altri, si ha che l'errore negativo nel calcolo del prodotto è: $\Delta P = \Delta L_1 \cdot L_2 + L_1 \cdot \Delta L_2$.

Dividendo ambo i membri per $P = L_1 \cdot L_2$ si ha:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta L_1 \cdot L_2}{L_1 \cdot L_2} + \frac{L_1 \cdot \Delta L_2}{L_1 \cdot L_2} \quad \text{semplificando} \quad \frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta L_1}{L_1} + \frac{\Delta L_2}{L_2} \quad \text{cioè}$$

$e_r = e_{r_1} + e_{r_2}$.

Propagazione degli errori nella potenza

L'errore relativo di una potenza è uguale al prodotto dell'esponente per l'errore relativo della base.

Sia $E = a^n$ $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{\Delta E}{E} = n \cdot \dfrac{\Delta a}{a}}$

Propagazione degli errori nella radice

L'errore relativo di una radice è uguale al rapporto fra l'errore relativo del radicando e l'indice della radice.

Sia $R = \sqrt[n]{a}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{\Delta R}{R} = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{\Delta a}{a}}$

Le cifre significative

Da quando visto precedentemente, una misura è costituita da una coppia: il valore della misura e l'errore.
Alcune volte però, viene fornito il solo valore della misura senza l'errore. In questi casi si sottintende che l'errore sia sull'ultima cifra. Dire, ad esempio, che la lunghezza di una matita è 13,2 cm significa che l'errore della misura è sulla prima cifra decimale e quindi ammonta a qualche decimo di centimetro.
Occorre fare attenzione al numero delle cifre con le quali vengono fornite le misure e i dati del problema. Le cifre significative di una misura sono le cifre certe più la prima cifra incerta perché affetta da errore.
Nel determinare il numero di cifre significative di una misura vengono trascurate le prime cifre zero a sinistra del numero: se non lo facessimo, le due scritture 3,48 cm e 0,0348 m, che rappresentano la stessa misura, avrebbero un diverso numero di cifre significative, mentre entrambe ne hanno tre.

In generale vale la seguente regola:

Il numero di cifre significative del risultato di un'operazione tra misure è uguale al numero di cifre significative della misura che ha precisione minore.

Cifre significative nell'addizione

Si consideri la somma dei due numeri: *3,4257 + 1,253*.

Il primo numero ha cinque cifre significative e il secondo ne ha quattro.
Quando si effettua la somma, ci si trova a sommare tra loro, volta per volta, due singole cifre.
Basta che una sola delle due cifre non sia significativa perché il risultato non sia significativo.

$$\begin{array}{r} 3,4257\ + \\ 1,253\ \ = \\ \hline 4,6587 \end{array}$$

In questo esempio l'ultima cifra *7* non è significativa, perché ottenuta come somma della cifra significativa *7* e della cifra non significativa *0*.

In questo esempio quindi, occorre tenere solo quattro cifre significative nel risultato.
Osservando però che *4,6587* è più vicino a *4,659* che a *4,658*, il risultato si approssima a *4,659*.

$$\begin{array}{r} 43,52\ \ \ \ \ + \\ 5,8367\ = \\ \hline 49,3567 \end{array}$$

In questo esempio le ultime due cifre 6 e *7* non sono significative, perché ottenute come somma di cifre significative con cifre non significative.

In questo esempio le cifre significative sono quattro.
Osservando però che *49,3567* è più vicino a *49,36* che a *49,35*, il risultato si approssima a *49,36*.

Cifre significative nella moltiplicazione

Nel calcolo della seguente moltiplicazione: $3,29 \cdot 48,32 = 158,9728$, essendo i due fattori formati da tre e quattro cifre significative, il loro prodotto deve avere tre cifre significative.
Essendo $158,9728$ più vicino a 159 che a 158, il prodotto viene approssimato a 159.

Notazione scientifica

In Fisica si incontrano grandezze le cui misure sono espresse da numeri molto grandi o molto piccole.
Ad esempio: $73.400.000.000.000.000.000.000$ oppure $0,000\,000\,000\,01$.
E' molto scomodo e laborioso scrivere questi numeri ed effettuare calcoli con essi.
Questi numeri possono essere rappresentati come prodotto di un numero maggiore o uguale a 1 ma minore di 10 per una potenza del 10. Questo tipo di rappresentazione è detta Notazione scientifica.

Ad esempio, la notazione scientifica di $73.400.000.000.000.000.000.000$ è $7,3 \cdot 10^{22}$.

La notazione scientifica di $0,000\,000\,000\,01$ è $1 \cdot 10^{-11}$.

Ordine di grandezza

Per stimare con immediatezza il valore numerico di una grandezza fisica si introduce la nozione di ordine di grandezza: *l'ordine di grandezza di un numero è la potenza di 10 a esponente intero che meglio approssima tale numero*.

Esempi: la misura $2,9979 \cdot 10^{8}\ m/s$ ha ordine di grandezza $10^{8}\ m/s$

$5,8469 \cdot 10^{5}\ m$ ha ordine di grandezza $10^{6}\ m$ (poiché la mantissa è maggiore di 5)

$5,8469 \cdot 10^{-7}\ m$ ha ordine di grandezza $10^{-6}\ m$ $4,8469 \cdot 10^{-7}\ m$ ha ordine di grandezza $10^{-7}\ m$.