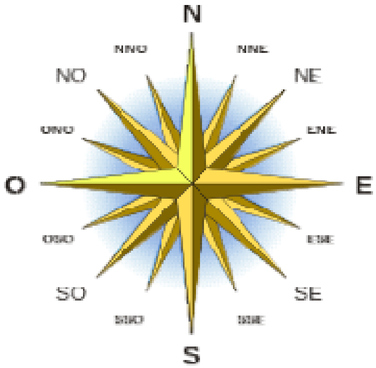
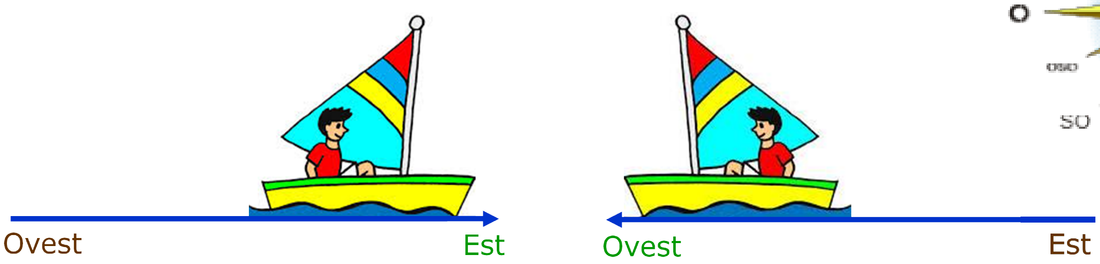
LE GRANDEZZE VETTORIALI

Lo spostamento

I moti nel piano



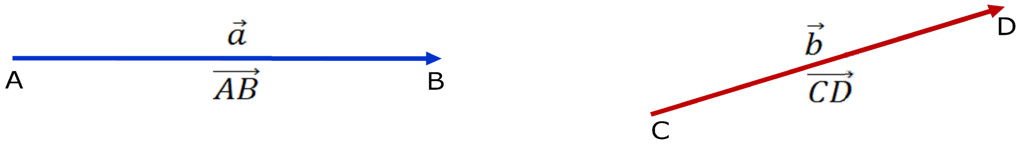
Per descrivere il moto di una barca non è sufficiente indicare la lunghezza del percorso, ma occorre indicare anche la direzione e il verso dello spostamento.



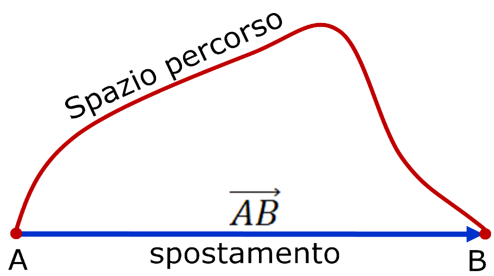
Per descrivere i moti che si svolgono in due dimensioni occorre definire:

- la **distanza** percorsa
- la **direzione** del movimento
- il **verso** di percorrenza.

Lo **spostamento** può essere rappresentato da un segmento orientato che unisce il punto di partenza al punto di arrivo.



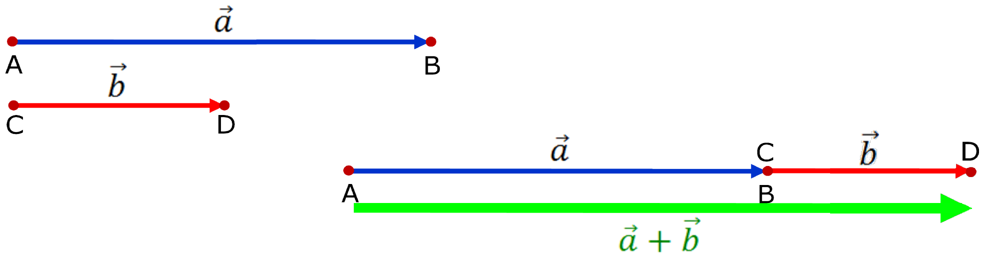
Lo spostamento non coincide con lo spazio effettivamente percorso per andare da A a B.



La somma di due spostamenti

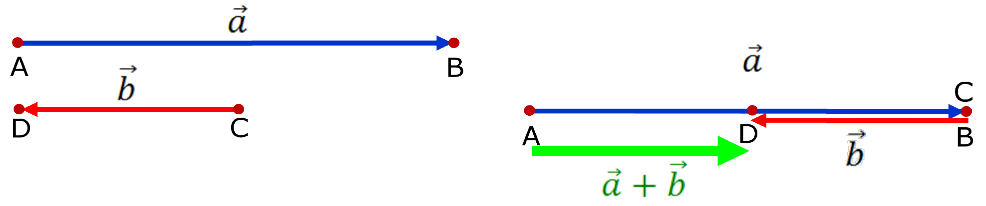
La somma di due spostamenti che hanno la stessa direzione e lo stesso verso è uno spostamento che ha:

- per **direzione**, la stessa direzione
- per **verso**, lo stesso verso
- per **spostamento**, la somma degli spostamenti

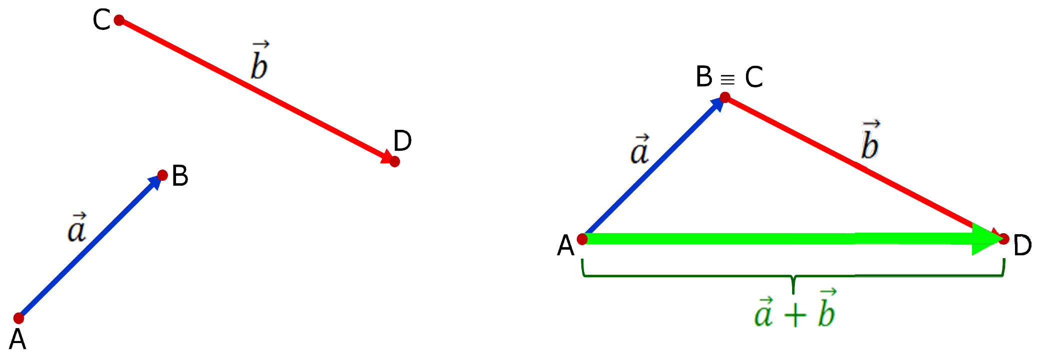


La somma di due spostamenti che hanno la stessa direzione e versi opposti è uno spostamento che ha:

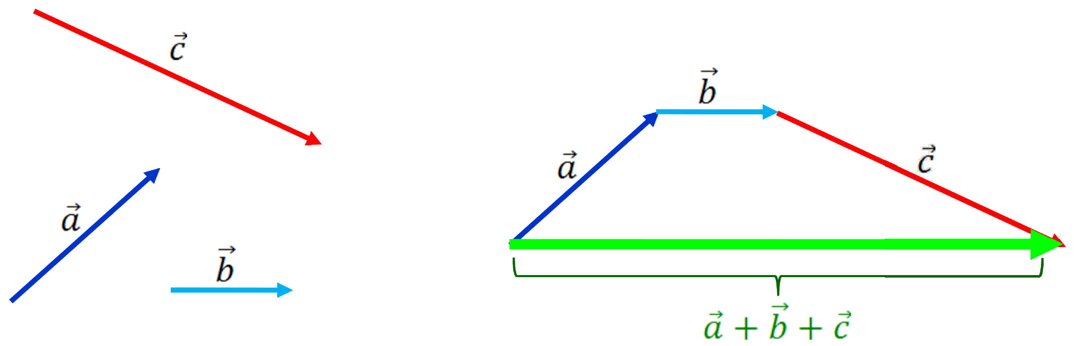
- per **direzione**, la stessa direzione
- per **verso**, quello dello spostamento maggiore
- per **spostamento**, la differenza fra quello maggiore e quello minore



La somma di due spostamenti che non hanno la stessa direzione si effettua con il metodo **punta-coda**.
Lo spostamento è quello che unisce la coda del secondo segmento alla punta del primo segmento.



La somma di più di due spostamenti che non hanno la stessa direzione si effettua con il metodo **punta-coda**.



Una **grandezza vettoriale** è una grandezza la cui individuazione è data da un vettore.
Di essa occorre conoscere non soltanto la sua misura, ma anche la sua direzione e il suo verso.

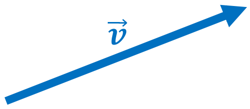
I vettori

Le grandezze fisiche come lo spostamento e la velocità sono **grandezze vettoriali**.

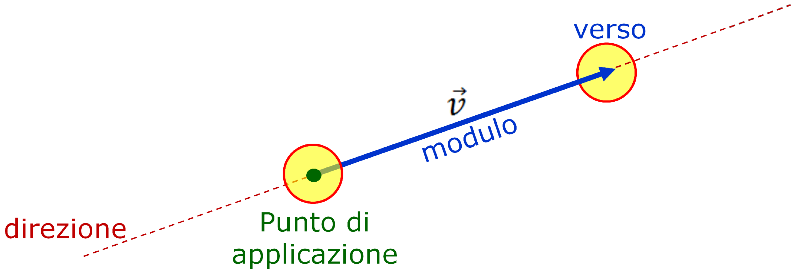
Esse sono rappresentate da un ente matematico detto **vettore**.

Il **vettore** è caratterizzato da:

- un **modulo** o intensità
- una **direzione**
- un **verso**



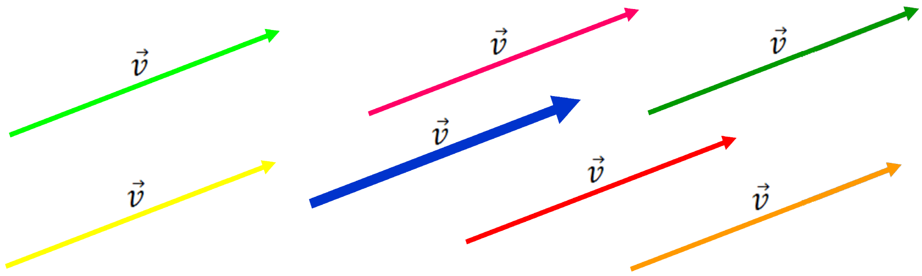
Graficamente un vettore è rappresentato da una freccia. Il modulo è rappresentato dalla lunghezza della freccia. La direzione è rappresentata dalla retta su cui giace la freccia. Il verso è dato dalla punta della freccia. Il punto di applicazione è il punto di inizio della freccia.



Un vettore non ha una determinata posizione nel piano.

Tutti gli infiniti vettori del piano che hanno lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso del vettore $\vec{v}$ sono equivalenti fra loro.

Il vettore $\vec{v}$ è il rappresentante di questa classe di equivalenza.



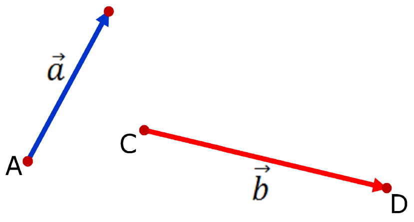
Le grandezze non vettoriali, cioè caratterizzate soltanto da un valore numerico, sono dette **grandezze scalari** o semplicemente scalari (*lunghezza di un tavolo, peso di un oggetto, ecc.*).

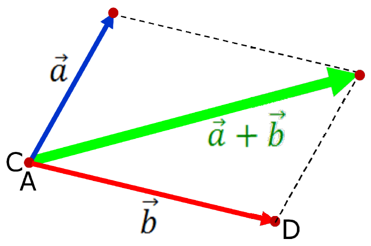
La somma di vettori

I vettori si possono addizionare con il metodo punta-coda o con la seguente **regola del parallelogramma**.

Regola del parallelogramma

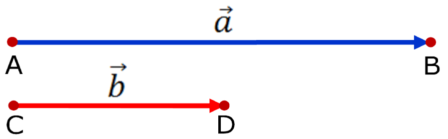
Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, applicati nello stesso punto, il *vettore somma* o *risultante* è individuato dalla diagonale del parallelogramma che ha per lati i due vettori.

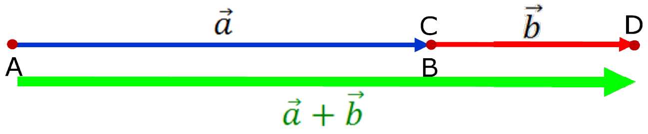




La somma di due vettori che hanno la stessa direzione e lo stesso verso è uno vettore che ha:

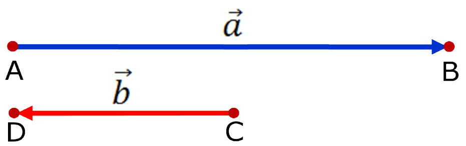
- per **direzione**, la stessa direzione
- per **verso**, lo stesso verso
- per **spostamento**, la somma degli spostamenti

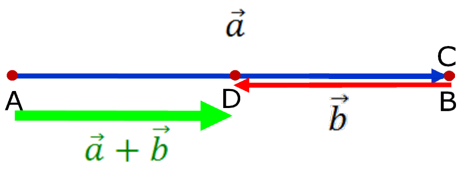




La somma di due vettori che hanno la stessa direzione e versi opposti è un vettore che ha:

- per **direzione**, la stessa direzione
- per **verso**, quello dello spostamento maggiore
- per **modulo**, la differenza fra quello maggiore e quello minore



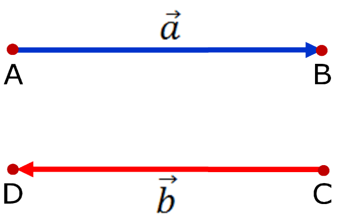


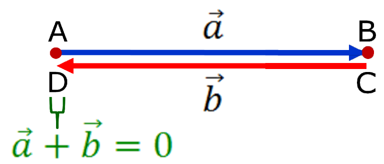
Vettori opposti

Due vettori a e b si dicono **opposti** se la loro somma dà come risultante il vettore **nullo**.

I vettori **opposti** possiedono:

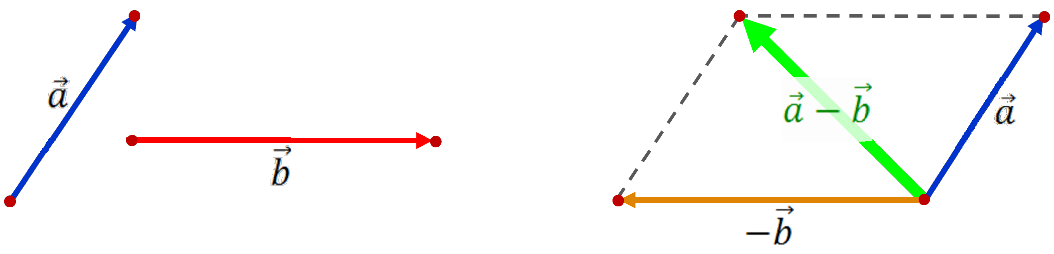
- stesso modulo
- stessa direzione
- verso opposto.





La differenza di due vettori

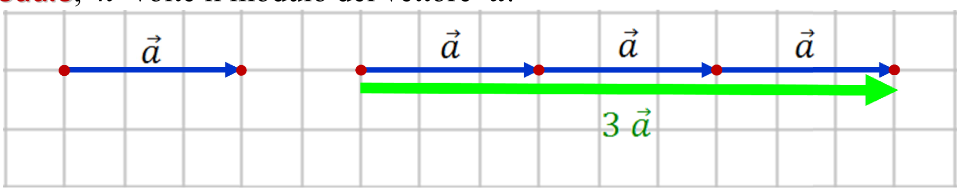
La differenza di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, è uguale alla somma del vettore $\vec{a}$ con l'opposto del vettore $\vec{b}$.



Il prodotto di un vettore per un numero

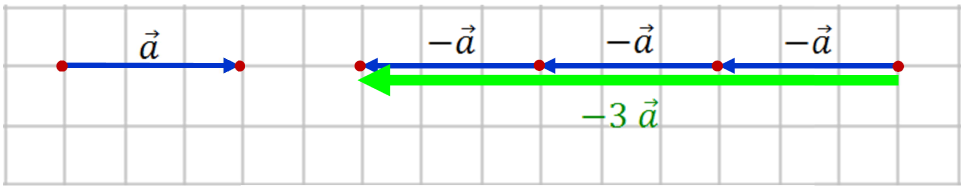
Il prodotto di un vettore $\vec{a}$ per un numero $k > 0$ è un vettore che ha:

- per **direzione**, la stessa direzione
- per **verso**, lo stesso verso
- per **modulo**, k volte il modulo del vettore $\vec{a}$.



Il prodotto di un vettore $\vec{a}$ per un numero $k < 0$ è un vettore che ha:

- per **direzione**, la stessa direzione
- per **verso**, il verso opposto al vettore $\vec{a}$
- per **modulo**, k volte il modulo del vettore $\vec{a}$.

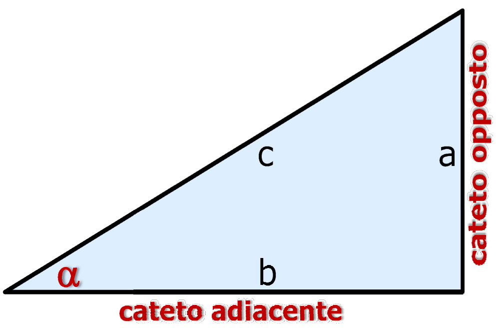


Funzioni goniometriche

Funzione seno

In un triangolo rettangolo, il **seno** di un angolo acuto è uguale al rapporto fra il cateto opposto all'angolo e l'ipotenusa.

$$sin\,\alpha = \frac{cateto\ opposto}{ipotenusa} = \frac{a}{c}$$



Funzione coseno

In un triangolo rettangolo, il **coseno** di un angolo acuto è uguale al rapporto fra il cateto adiacente all'angolo e l'ipotenusa.

$$cos\,\alpha = \frac{cateto\ adiacente}{ipotenusa} = \frac{b}{c}$$

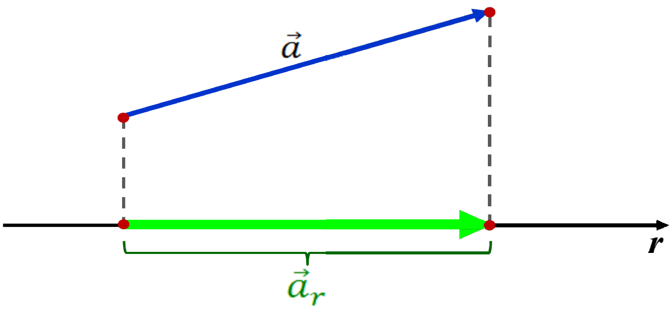
Funzione tangente

In un triangolo rettangolo, la **tangente** di un angolo acuto è uguale al rapporto fra il cateto opposto e il cateto adiacente all'angolo.

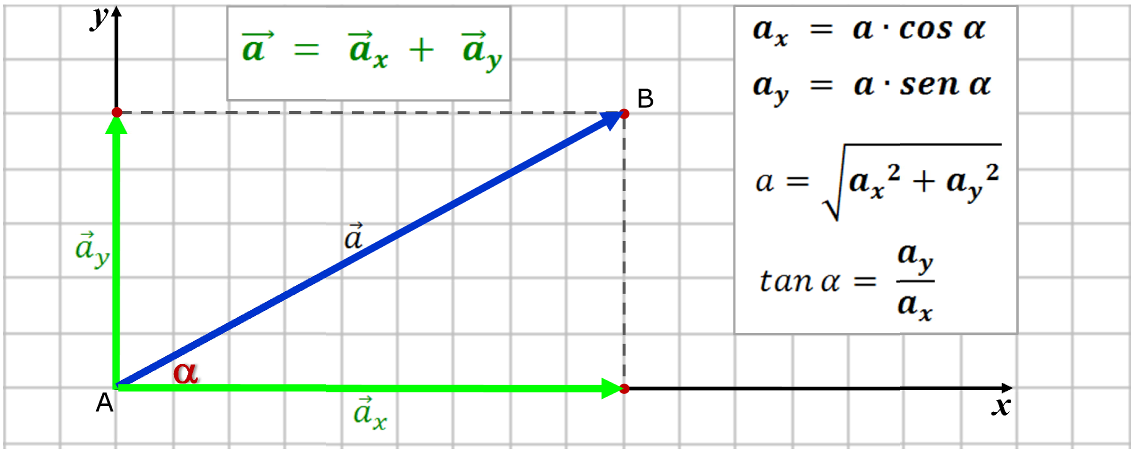
$$tan\,\alpha = \frac{cateto\ adiacente}{ipotenusa} = \frac{a}{b}$$

Scomposizione di un vettore

La proiezione ortogonale di un vettore $\vec{a}$ su una retta r è detta **componente** $\vec{a}_r$ del vettore lungo la retta r.

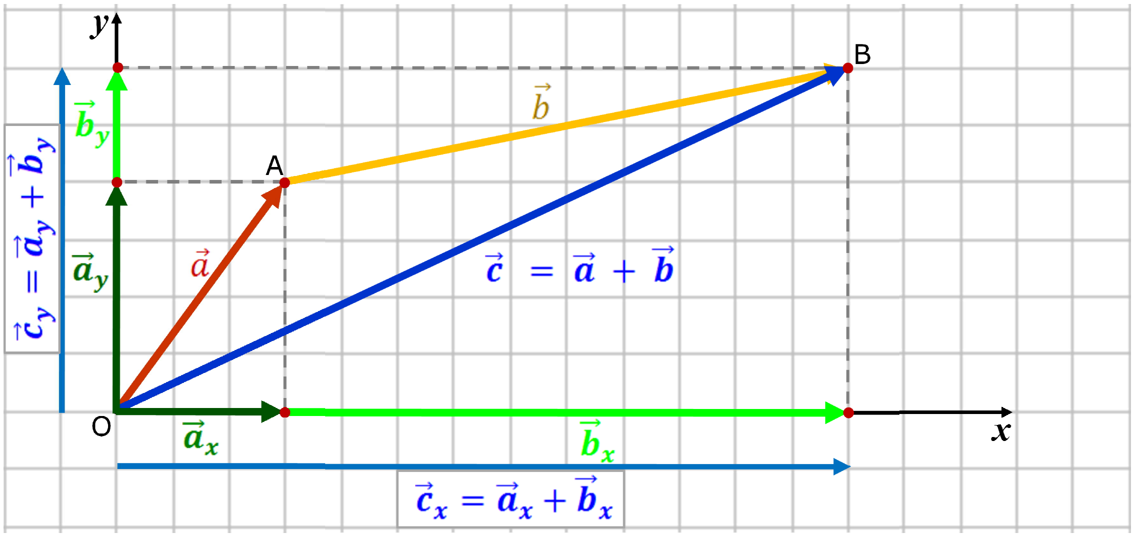


Un vettore $\vec{a}$ può essere scomposto in due **vettori componenti** secondo direzioni prefissate.
Scegliendo come direzioni gli assi cartesiani si ottiene:



Somma due vettori

Conoscendo le componenti cartesiane di due vettori è possibile calcolare algebricamente la loro somma.

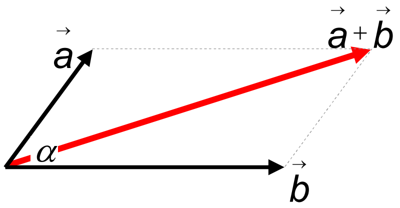


Approfondimenti

Somma di due vettori

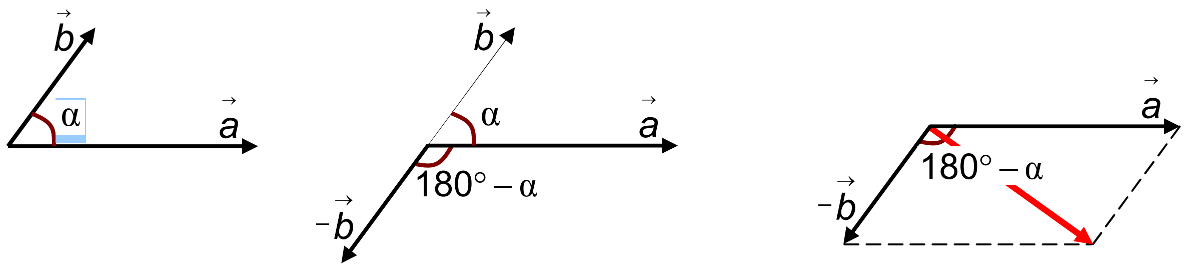
La somma di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si ottiene con la regola del parallelogramma.

Il suo modulo vale $\quad a + b \; = \; \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\,cos\,\alpha}$



Differenza di due vettori

La differenza di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, è uguale alla somma del vettore $\vec{a}$ con l'opposto del vettore $\vec{b}$.



$$\vec{a} - \vec{b} \; = \; \vec{a} + \left(-\vec{b}\right) \; = \; \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\,cos(180° - \alpha)} \; = \; \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\,cos\,\alpha}$$

In definitiva: $\quad \vec{a} - \vec{b} \; = \; \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\,cos\,\alpha}$

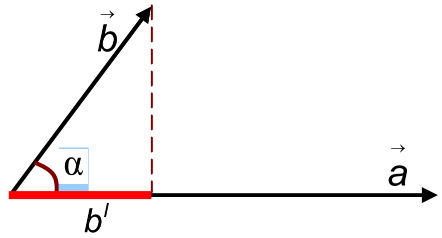
Prodotto scalare di due vettori

Il **prodotto scalare** di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, è il prodotto di un vettore per la componente dell'altro vettore lungo la direzione del primo.

Il prodotto scalare di due vettori è uno scalare e non un vettore.

Esso è positivo se α è acuto, negativo se α è ottuso.

In simboli: $\vec{a} \cdot \vec{b} \; = \; a \cdot b^I \; = \; a \cdot b \cdot \cos\alpha$



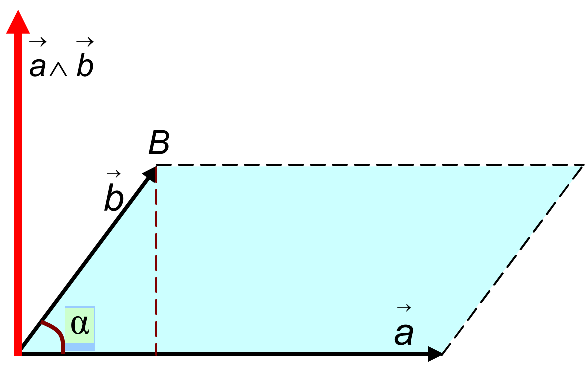
Osservazione

Il prodotto scalare di due vettori ortogonali è zero.

Prodotto vettoriale di due vettori

Il **prodotto vettoriale** di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, che si indica con $\vec{a} \wedge \vec{b}$ e si legge $\vec{a}$ vettore $\vec{b}$ è un vettore avente per modulo l'area del parallelogrammo costruito sui due vettori, per direzione quella perpendicolare al piano invidiato da due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e verso tale che, rispetto ad esso, il vettore $\vec{a}$ per sovvrapporsi al vettore $\vec{b}$, descrivendo un angolo minore di 180°, deve ruotare in senso antiorario.

Il suo modulo vale: $\vec{a} \wedge \vec{b} \; = \; a \cdot b\,sin\,\alpha$



Osservazione

Il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è zero.

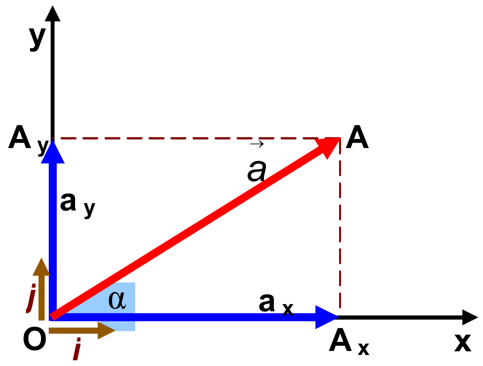
Regola della mano destra

Tenendo la mano destra in modo tale che le dita piegate seguano la rotazione del vettore $\vec{a}$ verso $\vec{b}$, il pollice indica la direzione e il verso del prodotto vettoriale.

Espressione cartesiana di un vettore

Le componenti cartesiane del vettore $\vec{a}$ sono le proiezioni OA_x e OA_y del vettore $\vec{a}$ lungo l'asse x e lungo l'asse y.

In simboli: $OA_x = a \cdot \cos\alpha$ e $OA_y = a \cdot \sin\alpha$



Considerando i versori $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ (vettori unitari diretti come gli assi):

$OA_x = a_x \cdot \vec{\imath}$ e $OA_y = a_y \cdot \vec{\jmath}$ si ottiene

l'espressione cartesiana del vettore: $\vec{a} = a_x \cdot \vec{\imath} + a_y \cdot \vec{\jmath}$

Somma di due vettori tramite le loro componenti

Le componenti del vettore somma di due vettori $\vec{a} = a_x \cdot \vec{\imath} + a_y \cdot \vec{\jmath}$ e $\vec{b} = b_x \cdot \vec{\imath} + b_y \cdot \vec{\jmath}$ sono uguali alla somma delle componenti omonime dei due vettori.

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \cdot \vec{\imath} + (a_y + b_y) \cdot \vec{\jmath} \,.$$

Dimostrazione

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j}\right) + \left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j}\right) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + b_x \vec{i} + b_y \vec{j} = (a_x + b_x)\,\vec{i} + (a_y + b_y)\,\vec{j}$$

Prodotto scalare di due vettori tramite le loro componenti

Il prodotto scalare di due vettori $\vec{a} = a_x \cdot \vec{\imath} + a_y \cdot \vec{\jmath}$ e $\vec{b} = b_x \cdot \vec{\imath} + b_y \cdot \vec{\jmath}$ è uguale alla somma dei prodotti delle componenti omonime dei due vettori.

In simboli: $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \cdot b_x) \cdot \vec{\imath} + (a_y \cdot b_y) \cdot \vec{\jmath}$.

Dimostrazione

Essendo $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ e $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$ si ha:

$$\vec{a}\, x\, \vec{b} = \left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j}\right) \cdot \left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j}\right) = a_x b_x\, \vec{i}\, x\, \vec{i} + a_x b_y\, \vec{i}\, x\, \vec{j} + a_y b_x\, \vec{j}\, x\, \vec{i} + a_y b_y\, \vec{j}\, x\, \vec{j} =$$

$$= a_x b_x + a_y b_y$$

Prodotto vettoriale di due vettori tramite le loro componenti

Il prodotto vettoriale di due vettori $\vec{a} = a_x \cdot \vec{\imath} + a_y \cdot \vec{\jmath}$ e $\vec{b} = b_x \cdot \vec{\imath} + b_y \cdot \vec{\jmath}$ giacenti sullo stesso piano α è il vettore diretto secondo il versore $\vec{k}$ ortogonale al piano α, nello stesso verso di $\vec{k}$ oppure verso opposto, a secondo che la componente $a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x$ in tale direzione risulti positiva oppure negativa e avente modulo $|a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x|$.

In simboli: $\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k}$.

Dimostrazione

Essendo $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = 0$ e $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$ si ha:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j}\right) \wedge \left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j}\right) = a_x b_x\, \vec{i} \wedge \vec{i} + a_x b_y\, \vec{i} \wedge \vec{j} + a_y b_x\, \vec{j} \wedge \vec{i} + a_y b_y\, \vec{j} \wedge \vec{j} =$$

$$= a_x b_y \vec{K} + a_y b_x \left(-\vec{k}\right) = a_x b_y \vec{K} - a_y b_x \vec{k} = \left(a_x b_y - a_y b_x\right) \vec{k}$$